[B1] Determinare l'equazione cartesiana del piano passante per il punto $(1,2,3)$ e perpendicolare alla retta di equazione parametrica $(-t+1, 2t+3, t-4)$.

retta $(1,3,-4) + t\,(-1,2,1) \rightsquigarrow \boxed{\underbrace{-x+2y+z}_{\text{coeff = vett. direzione retta}} = 6}$

Trovato imponendo che contenga il p.to

— o — o —

[B2] Determinare la segnatura della forma quadratica

$$q(x,y,z) = x^2 - y^2 + yz.$$

Matrice associata
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Sylvester 1-2-3 :
$\mathrm{Det}_{1\times1} = 1$
$\mathrm{Det}_{2\times2} = -1$
$\mathrm{Det}_{3\times3} = -\frac{1}{4}$

$+ \quad + \quad - \quad -$
$\quad P \quad V \quad P$

$\boxed{n_+ = 2, \quad n_- = 1, \quad n_0 = 0}$

— o — o —

[L1] Nel piano cartesiano, indichiamo con R la rotazione di $90°$ in senso orario intorno al punto $(2, -1)$, e con S la simmetria rispetto alla retta di equazione $x + 2y = 3$.

(a) Determinare l'espressione analitica di R.

(b) Determinare l'espressione analitica di S.

(c) Stabilire che tipo di trasformazione è la composizione $S \circ R$, ottenuta facendo prima R e poi S.

(a) Rotazione $90°$ ↻ intorno origine $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x-2 \\ y+1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-2 \\ y+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+1 \\ -x+2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} y+3 \\ -x+1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{(x,y) \to (y+3, -x+1)}$ (verificare qualcosa)

(b) La simmetria risp. a $x+2y=0$ manda $(-2,1) \to (-2,1)$
$(1,2) \to (-1,-2)$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \to \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x-4y+1 \\ -4x-3y+7 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{5} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\binom{1}{1} \in$ retta

$$\boxed{(x,y) \to \left(\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + \frac{6}{5}, -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + \frac{12}{5}\right)}$$

Verificare qualcosa (ad esempio il luogo dei p.ti fissi)

(c) Componendo bovinamente troviamo

$$\boxed{(x,y) \to \left(\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{11}{5}, \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{3}{5}\right)}$$

Si verifica facilmente che NON ci sono p.ti fissi e la parte di matrice rappresenta una simmetria. Quindi si tratta di

$\boxed{\text{simmetria seguita da traslazione // alla retta di simmetria}}$

rispetto a $x-3y=2$ vettore $\left(\frac{9}{5}, \frac{3}{5}\right)$

non richiesti, ma utile esercizio

[L2] Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare la forma canonica di A ed una matrice di cambio di base che porta A in tale forma canonica.

Gli autovalori della matrice sono (si vedono a occhio, oppure si calcolano con la procedura classica

- $\lambda = 0$ con autovettore $(1, 0, -1)$
- $\lambda = 1$ con autovettore $(0, 1, 0)$
- $\lambda = 2$ con autovettore $(1, 0, 1)$

Di conseguenza

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}}_{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Non sarebbe male fare la verifica.

— o — o —