Cambi di base 3

Argomenti: matrici di cambio di base **Difficoltà:** ⋆⋆⋆

Prerequisiti: cambi di base, calcolo della matrice inversa

Sia $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base di uno spazio vettoriale V, e sia $f : V \to V$ l'applicazione lineare tale che

$$f(v_1) = v_1, \qquad f(v_2) = 2v_2, \qquad f(v_3) = 2v_3 + v_2.$$

Determinare le matrici che rappresentano la stessa applicazione f utilizzando in partenza ed arrivo le basi indicate.

{Base partenza} {Base arrivo}	Matrice	{Base partenza} {Base arrivo}	Matrice
$\{v_1, v_2, v_3\}$ $\{v_1, v_2, v_3\}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}$	$\{v_1, v_3, v_2\}$ $\{v_1, v_3, v_2\}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix}$
$\{v_3, v_2, v_1\}$ $\{v_3, v_2, v_1\}$	$\begin{matrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	$\{v_2, v_3, v_1\}$ $\{v_2, v_3, v_1\}$	$\begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$
$\{v_1, v_2, v_3\}$ $\{v_3, v_2, v_1\}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}$	$\{v_3, v_2, v_1\}$ $\{v_1, v_2, v_3\}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{matrix}$
$\{v_1, v_2, v_3\}$ $\{v_1, 2v_2, v_3\}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}$	$\{v_1, 2v_2, v_3\}$ $\{v_1, v_2, v_3\}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}$
$\{v_1, v_2, v_3\}$ $\{v_1, 2v_2, 2v_3 + v_1\}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	$\{v_1, 2v_2, 2v_3 + v_1\}$ $\{v_1, v_2, v_3\}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{matrix}$
$\{-v_1, v_2, v_3\}$ $\{-v_1, v_2, v_3\}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}$	$\{v_1, v_2, -v_3\}$ $\{v_1, v_2, -v_3\}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}$
$\{-v_1, -v_2, -v_3\}$ $\{v_1, v_2, v_3\}$	$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{matrix}$	$\{v_1, v_2, v_3\}$ $\{-v_1, -v_2, -v_3\}$	$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{matrix}$

Determinare quali delle seguenti matrici rappresentano l'applicazione f descritta sopra usando in partenza la base $\{v_1, v_2, v_3\}$, ed in arrivo una base eventualmente diversa (nei casi affermativi, determinare la base in arrivo).

$\{v_1, v_2, v_3\}$ $\quad$ $\{v_1, 2v_2, 2v_3 + v_2\}$ $\quad$ $\{v_1, v_2, \frac{2}{3}v_3 + \frac{1}{3}v_2\}$ $\quad$ $\{v_1, v_2, v_3 - \frac{1}{2}v_2\}$ $\quad$ $\{2v_3 + v_2, v_2, \frac{1}{3}v_1\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$C_2 - C_1 = C_3 - C_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

RANGO $= 2 < 3$ $\quad$ RANGO $= 2 < 3$ $\quad$ RANGO $= 2 < 3$ $\quad$ $\{v_1, -\frac{v_1}{2} + \frac{v_2}{2}, -\frac{v_1}{12} - \frac{v_2}{4} + \frac{v_3}{3}\}$

$\{-\frac{1}{2}v_1 + \frac{3}{2}v_2 - v_3, \frac{4}{5}v_1 - \frac{3}{5}v_2 - \frac{3}{2}v_3, -\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 + v_3\}$