Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Scritto d'esame di Analisi Matematica 2

Pisa, 8 Giugno 2018

1. Consideriamo la funzione $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$ e l'insieme

$$C = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1,\ x + y = 1,\ |z| \leq 2\right\}.$$

Determinare estremo inferiore/superiore della funzione $f(x, y, z)$ al variare di (x, y, z) in C, precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo/massimo.

2. Sia $Q = [0, +\infty)^2$ il primo quadrante in $\mathbb{R}^2$.

(a) Studiare, al variare del parametro reale positivo a, la convergenza dell'integrale

$$\int_Q \frac{\log(1 + x^2 + y)}{(x^2 + y^4)^a}\, dx\, dy.$$

(b) (Bonus question) Per ogni numero reale $r > 0$ poniamo $E_r = \{(x, y) \in Q : x^2 + y^2 \geq r^2\}$. Calcolare, al variare del parametro reale λ, il limite

$$\lim_{r \to +\infty} r^\lambda \int_{E_r} \frac{\log(1 + x^2 + y)}{x^2 + y^4}\, dx\, dy.$$

3. (a) Dimostrare che esiste un'unica funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, di classe C^∞, tale che

$$f(x) + x^2 e^{f(x)} = x^2 + e^{x^4} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(b) Calcolare

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - \cos x}{\log(1 + x^2)}.$$

(c) Calcolare la parte principale di $f(x)$ per $x \to +\infty$.

4. Consideriamo l'equazione differenziale

$$u'' = \frac{1}{u^4}.$$

(a) Dimostrare che la soluzione con dati $u(0) = 1$ e $u'(0) = -2018$ è globale nel passato e nel futuro, e calcolarne la parte principale per $t \to +\infty$.

(b) Determinare per quali valori del parametro reale α la soluzione con dati $u(0) = -1$ e $u'(0) = \alpha$ ha esistenza globale nel futuro.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.