Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Scritto d'esame di Algebra Lineare

Pisa, 17 Novembre 2013

1. Consideriamo i seguenti punti nello spazio

$$A = (1, 0, -2), \qquad B = (2, 3, 4), \qquad C = (-1, 2, 3).$$

   (a) Determinare l'area del triangolo ABC.

   (b) Determinare il punto della retta AB più vicino a C.

   (c) Sia r la retta passante per C e parallela alla retta AB.
   Determinare l'intersezione tra r ed il piano xz e l'angolo che formano.

2. Consideriamo in $\mathbb{R}^4$ i sottospazi

$$V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y = z + w = 0\},$$
$$W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z = y - z + w = 0\}.$$

   (a) Dimostrare che $\mathbb{R}^4 = V \oplus W$.

   (b) Dimostrare che esiste un'unica applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $f(v) = -v$ per ogni $v \in V$ e $f(w) = 3w$ per ogni $w \in W$. Determinare quindi la matrice associata ad f nella base canonica.

3. Sia $M_{3\times 3}$ lo spazio vettoriale delle matrici 3×3, e sia $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

   (a) Dimostrare che l'insieme delle matrici $A \in M_{3\times 3}$ tali che $AB = 0$ è un sottospazio vettoriale, quindi determinarne una base e la dimensione.

   (b) Dimostrare che esiste una matrice B per cui il sottospazio descritto al punto precedente ha dimensione 6.

4. Consideriamo il sistema lineare

$$\begin{aligned} x + 2y + az &= 0 \\ 3x - y + 2z &= b \\ y + 4z &= 3 \end{aligned}$$

   dove a e b sono parametri reali.

   (a) Determinare, al variare dei parametri a e b, il numero di soluzioni del sistema.

   (b) Nei casi in cui il sistema ammette più di una soluzione, determinare l'insieme delle soluzioni.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

1. Consideriamo i seguenti punti nello spazio

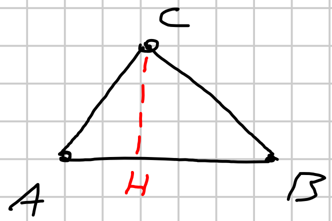
$$A=(1,0,-2),\qquad B=(2,3,4),\qquad C=(-1,2,3).$$

(a) Determinare l'area del triangolo ABC.

(b) Determinare il punto della retta AB più vicino a C.

(c) Sia r la retta passante per C e parallela alla retta AB. Determinare l'intersezione tra r ed il piano xz e l'angolo che formano.

a)



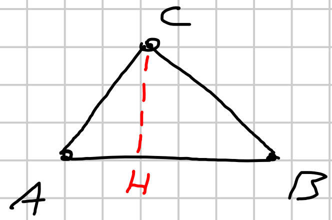
$AC=(-2,2,5)\quad AB=(1,3,6)$

$AC\cdot AB=-2+6+30=35$

$|AC|=\sqrt{33}\quad |AB|=\sqrt{56}$

$\cos\alpha=\dfrac{35}{\sqrt{33\cdot 56}}\qquad \sin\alpha=\sqrt{\dfrac{33\cdot 56-35^2}{33\cdot 56}}=\sqrt{\dfrac{362}{33\cdot 56}}\qquad AREA=\dfrac{1}{2}\sqrt{362}$

b)



$r_{AB}=(1,0,-2)+\delta\cdot(1,3,6)$

$P\in r_{AB}\ (1+\delta,\ 3\delta,\ -2+6\delta)$

$CP=(2+\delta,\ -2+3\delta,\ -5+6\delta)\qquad AB=(1,3,6)$

$CP\cdot AB=2+\delta-6+9\delta-30+36\delta=56\delta-35=0\quad \delta=\dfrac{17}{23}$

$H=\left(\dfrac{40}{23},\ \dfrac{51}{23},\ \dfrac{56}{23}\right)\qquad CH=\left(\dfrac{63}{23},\ \dfrac{5}{23},\ -\dfrac{13}{23}\right)$

$|AB|=\sqrt{1+9+36}=\sqrt{56}\qquad |CH|=\dfrac{1}{23}\sqrt{3969+25+169}$

$\dfrac{1}{2}|AB|\cdot|CH|=$ 9.51314879522 $\qquad =\dfrac{1}{23}\sqrt{5163}$

c) $r:\ (-1,2,3)+\delta(1,3,6)\qquad \cos\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{56}}$

$y=0\ \Rightarrow\ 2+3\delta=0\ \Rightarrow\ \delta=-\dfrac{2}{3}$

$P=\left(-1-\dfrac{2}{3},\ 2-2,\ 3-4\right)=\left(-\dfrac{5}{3},\ 0,\ -1\right)$

2. Consideriamo in $\mathbb{R}^4$ i sottospazi

$$V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y = z + w = 0\},$$
$$W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z = y - z + w = 0\}.$$

(a) Dimostrare che $\mathbb{R}^4 = V \oplus W$.

(b) Dimostrare che esiste un'unica applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $f(v) = -v$ per ogni $v \in V$ e $f(w) = 3w$ per ogni $w \in W$. Determinare quindi la matrice associata ad f nella base canonica.

a) $V: \begin{cases} x+y=0 \\ z+w=0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=-y \\ z=-w \end{cases} \Rightarrow \mathrm{DIM}(V)=2$

$W: \begin{cases} x-y+z=0 \\ y-z+w=0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=y-z \\ w=z-y \end{cases} \Rightarrow \mathrm{DIM}(W)=2$

$V \cap W \begin{cases} x+y=0 \\ z+w=0 \\ x-y+z=0 \\ y-z+w=0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow x=y=z=w=0$

$\mathrm{DIM}\ V \cap W = \{0\}$

$\dim(V+W) + \cancel{\dim(V \cap W)} = \dim V + \dim W \Rightarrow \dim(V \oplus W) = 4$

F. DI GRASSMANN

b) BASE V $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ BASE W $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \varepsilon_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

OSS

$M v_\varepsilon = v_e$

$v_\varepsilon = M^{-1} v_e$

$\hat{A} v_\varepsilon = f_\varepsilon(v_\varepsilon) \qquad \hat{A} M^{-1} v_e = f_\varepsilon(v_\varepsilon) \qquad M \hat{A} M^{-1} v_e = f_e(v_e)$

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \qquad A' v_\varepsilon = f_e(v_\varepsilon)$$

$$
\begin{array}{l}
- \\ \\ - \\ \\
\end{array}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
-1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\left(\begin{array}{cccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & -1/3 & 1/3 & -2/3 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & 1/3 & 1/3 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 2/3 & 2/3 & 1/3 & 1/3 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 2/3 & 2/3
\end{array}\right)
$$

$$
M^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} =
$$

$$
= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 & -5 \\ 8 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 8 \\ -5 & -5 & 5 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}
$$

3. Sia $M_{3\times 3}$ lo spazio vettoriale delle matrici 3×3, e sia $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

(a) Dimostrare che l'insieme delle matrici $A \in M_{3\times 3}$ tali che $AB = 0$ è un sottospazio vettoriale, quindi determinarne una base e la dimensione.

(b) Dimostrare che esiste una matrice B per cui il sottospazio descritto al punto precedente ha dimensione 6.

a.1) SIANO $A_1, A_2 \in M_{3x3}$ t.c. $A_1B=0$ $A_2B=0$

$$\Rightarrow (A_1+A_2)B = A_1B+A_2B=0 \qquad (cA_1)B = c(A_1B)=0$$

a.2) $(a\ b\ c)\cdot B = aR_1+bR_2+cR_3=0$ $\qquad (a\ b\ c) \equiv$ RIGA DI A

$$B^T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \qquad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ RANGO=2

$$\Rightarrow \begin{cases} a-8c+7c=0 \Rightarrow a=c \\ -3b-6c=0 \Rightarrow b=-2c \end{cases} \Rightarrow \text{RIGA DI } A = (c, -2c, c)$$

BASE $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

a.3) DIM = 3 ($\equiv$ x DEF. = N° ELEMENTI BASE)

b) SE RANGO DI $B = 1$ $\Rightarrow$ ESISTONO DUE FAMIGLIE DI VETTORI RIGA V_1, V_2 t.c. $VB = 0$

BASE $A_1 = \begin{pmatrix} — V_1 — \\ 0\ \ 0\ \ 0 \\ 0\ \ 0\ \ 0 \end{pmatrix}$ $A_2 = \begin{pmatrix} 0\ \ 0\ \ 0 \\ — V_1 — \\ 0\ \ 0\ \ 0 \end{pmatrix}$ $A_3 = \begin{pmatrix} 0\ \ 0\ \ 0 \\ 0\ \ 0\ \ 0 \\ — V_1 — \end{pmatrix}$

$A_4 = \begin{pmatrix} — V_2 — \\ 0\ \ 0\ \ 0 \\ 0\ \ 0\ \ 0 \end{pmatrix}$ $A_5 = \begin{pmatrix} 0\ \ 0\ \ 0 \\ — V_2 — \\ 0\ \ 0\ \ 0 \end{pmatrix}$ $A_6 = \begin{pmatrix} 0\ \ 0\ \ 0 \\ 0\ \ 0\ \ 0 \\ — V_2 — \end{pmatrix}$

DIM = 6

4. Consideriamo il sistema lineare

$$\begin{aligned} x + 2y + az &= 0 \\ 3x - y + 2z &= b \\ y + 4z &= 3 \end{aligned}$$

dove a e b sono parametri reali.

(a) Determinare, al variare dei parametri a e b, il numero di soluzioni del sistema.

(b) Nei casi in cui il sistema ammette più di una soluzione, determinare l'insieme delle soluzioni.

(a)

$$\begin{cases} x + 2y + az = 0 \\ 3x - y + 2z = b \\ y + 4z = 3 \end{cases} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 0 \\ 3 & -1 & 2 & b \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 0 \\ 0 & -7 & 2-3a & b \\ 0 & 0 & 30-3a & 21+b \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} \text{UNICA SOLUZIONE} \Rightarrow 30-3a \neq 0 \Rightarrow a \neq 10 \\ \text{NESSUNA SOLUZIONE} \Rightarrow 30-3a = 0 \quad 21+b \neq 0 \Rightarrow a = 10 \quad b \neq -21 \\ \text{INFINITE SOLUZIONI} \Rightarrow 30-3a = 0 \quad 21+b = 0 \Rightarrow a = 10 \quad b = -21 \end{cases}$$

(b)

$$a = 10,\ b = -21 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 10 & 0 \\ 0 & -7 & 28 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = -2y - 10z = -6 + 8z - 10z \\ -7y = -21 - 28z \quad y = 3 - 4z \\ z \text{ LIBERO} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -6 - 2z \\ y = 3 - 4z \\ z \end{cases} \Rightarrow (-6 - 2\delta,\ 3 - 4\delta,\ \delta)$$

$$(-6, 3, 0) + \delta(-2, -4, 1)$$

VER. $(-6, 3, 0)$ ok!!! $\quad (-8, -1, 1)$ ok!!!