## Esercizio 2

**Testo.** Deteminare, al variare di $x \in \mathbb{R}$, la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\binom{3n}{n}}.$$

**Soluzione.**

$$\binom{3n}{n} = \frac{(3n)!}{n!(2n)!}.$$

Consideriamo la serie dei valori assoluti:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x|^n n!(2n)!}{(3n)!}$$

e applichiamo il criterio del rapporto a questa serie a termini positivi:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|x|(n+1)(2n+1)(2n+2)}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} = \frac{4|x|}{27} \frac{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{2n})(1+\frac{2}{2n})}{(1+\frac{1}{3n})(1+\frac{2}{3n})(1+\frac{3}{3n})}.$$

Quindi $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4|x|}{27}$. Per il criterio del rapporto, questo implica che

$$\begin{cases} \text{per } |x| < \frac{27}{4} & \text{la serie degli } a_n \text{ converge;} \\ \text{per } |x| > \frac{27}{4} & \text{la serie degli } a_n \text{ diverge ed è definitivamente crescente.} \end{cases}$$

*Inoltre*, nel caso $|x| = \frac{27}{4}$:

STABILIZZA
e
LIMITE

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{9n^2+5n}{18n^2+18n+4} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

e quindi definitivamente

$$\boxed{n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right)} > 0 \Rightarrow \boxed{\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow a_{n+1} > a_n.}$$

Quindi, poiché $a_n$ è a termini positivi, anche nel caso $|x| = \frac{27}{4}$ la serie diverge ed è definitivamente crescente.
Per cui, chiamando $b_n = \frac{x^n}{\binom{3n}{n}}$, poiché $a_n = |b_n|$:

$$\begin{cases} \text{per } |x| < \frac{27}{4} & \text{la serie dei } b_n \text{ converge assolutamente, quindi converge;} \\ \text{per } x \geq \frac{27}{4}, & a_n = b_n, \text{ quindi la serie dei } b_n \text{ diverge a } +\infty; \\ \boxed{\text{per } x \leq -\frac{27}{4}} & \text{la serie dei } b_n \text{ è a segni alterni e la serie dei moduli diverge} \\ & \text{in modo crescente, quindi la serie dei } b_n \text{ è indeterminata.} \end{cases}$$

? ? ? ? ?

?

**Errori comuni.**

- Alcuni studenti hanno fatto errori gravi nel manipolare i fattoriali. In particolare, $(3n)! \neq 3(n!)$ e $(2n)! \neq 2(n!)$. Uno degli studenti ha scritto che $(3n)! = 3!n!$, e anche questo è falso.