Esercizio 2.

Data la funzione così definita, $f(x,y) = \begin{cases} 0 \ se \ (x,y)=(0,0) \\ \dfrac{x^2 \cdot y}{x^2+y^2} \ se \ (x,y)\neq(0,0) \end{cases}$

determinare :

$f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$, $f_{\boldsymbol{v}}(0,0)$, differenziabilità , appartenenza alle classi $C^0(\mathbb{R}^2)$ e $C^1(\mathbb{R}^2)$, eventuale esistenza ed uguaglianza tra $f_{xy}(0,0)$ e $f_{yx}(0,0)$.

Svolgimento :

Determiniamo l'eventuale continuità di $f(x,y)$ in $(0,0)$

essendo $0 \leqslant |f(x,y)| = |y| \dfrac{\cdot x^2}{x^2+y^2} \leqslant |y| \cdot \dfrac{x^2}{x^2} = |y|$ segue che $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

e la funzione data è continua su tutto $\mathbb{R}^2$, quindi è $C^0(\mathbb{R}^2)$.

Essendo ora le restrizioni agli assi *x* ed *y* identicamente nulle, abbiamo che le derivate parziali prime esistono e sono nulle :

$$f_x(0,0) = 0 \quad e \quad f_y(0,0) = 0$$

Verifichiamo adesso l'esistenza delle derivate direzionali in $(0,0)$:

sia $\boldsymbol{v} = (\alpha, \beta) \neq \boldsymbol{0}$, allora è $f_{\boldsymbol{v}}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(\alpha\cdot h, \beta\cdot h) - f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\alpha^2\cdot\beta\cdot h^3}{(\alpha^2+\beta^2)\cdot h^3} = \dfrac{\alpha^2\cdot\beta}{(\alpha^2+\beta^2)}$

Dunque, le derivate direzionali in $(0,0)$ esistono.

Verifichiamo ora la differenziabilità di $f(x,y)$ in $(0,0)$:

dalla definizione di differenziale discende che deve essere $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x_0}} \dfrac{f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x_0}) - \langle \nabla f(\boldsymbol{x_0}), (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0})\rangle}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0}\|} = 0$

che nel nostro caso, essendo $\boldsymbol{x_0} = (0,0)$, $f(\boldsymbol{x_0}) = 0$, $\nabla f(\boldsymbol{x_0}) = (0,0)$, diventa $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 \cdot y}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0$

Passando a coordinate polari, con $\rho > 0$ e $\theta \in [0, 2\pi]$, abbiamo che il precedente limite diventa

$\lim\limits_{\rho\to 0^+} \dfrac{\rho^3 \cdot \cos^2(\theta) \cdot \sin(\theta)}{\rho^3} = \cos^2(\theta)\cdot\sin(\theta) \neq 0$ in generale. Quindi, $f(x,y)$ non è differenziabile in $(0,0)$.

Conseguentemente, almeno una tra f_x e f_y non è continua in $(0,0)$ e, quindi, $f(x,y)$ non è $C^1(\mathbb{R}^2)$

Infine, la non continuità di f_x oppure di f_y implica la sua non differenziabilità e, pertanto, per il secondo teorema di inversione, segue che nel punto $(0,0)$ è $f_{xy} \neq f_{yx}$

Tuttavia si verifica, tramite calcolo diretto, che le due derivate parziali miste in $(0,0)$ sono date da

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f_x(0,k) - f_x(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0}{k} = 0 \quad e \quad f_{xy}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^4}{h \cdot h^4} = \pm\infty$$

con $\quad f_x = \dfrac{2 \cdot x \cdot y^3}{(x^2 + y^2)^2} \qquad\qquad f_y = \dfrac{x^4 - x^2 \cdot y^2}{(x^2 + y^2)^2}$

Quindi, $\quad f_{xy}(0,0)$ non esiste.