Esercizio 2.

Data la funzione così definita, $f(x,y) = \left\{ \begin{matrix} 0 \ se \ (x,y)=(0,0) \\ \dfrac{x^2 \cdot y}{x^2+y^2} \ se \ (x,y)\neq(0,0) \end{matrix} \right\}$

determinare :

$f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$, $f_{\boldsymbol{v}}(0,0)$, differenziabilità , appartenenza alle classi $C^0(\mathbb{R}^2)$ e $C^1(\mathbb{R}^2)$, eventuale esistenza ed uguaglianza tra $f_{xy}(0,0)$ e $f_{yx}(0,0)$.

<u>Svolgimento :</u>

Determiniamo l'eventuale continuità di $f(x,y)$ in $(0,0)$

essendo $0 \leqslant |f(x,y)| = |y| \dfrac{\cdot x^2}{x^2+y^2} \leqslant |y| \cdot \dfrac{x^2}{x^2} = |y|$ segue che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

e la funzione data è continua su tutto $\mathbb{R}^2$, quindi è $C^0(\mathbb{R}^2)$.

Essendo ora le restrizioni agli assi *x* ed *y* identicamente nulle, abbiamo che le derivate parziali prime esistono e sono nulle :

$$f_x(0,0) = 0 \ \ e \ \ f_y(0,0) = 0$$

Verifichiamo adesso l'esistenza delle derivate direzionali in $(0,0)$:

sia $\boldsymbol{v} = (\alpha,\beta)\neq\boldsymbol{0}$, allora è $f_{\boldsymbol{v}}(0,0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(\alpha\cdot h,\beta\cdot h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{\alpha^2\cdot\beta\cdot h^3}{(\alpha^2+\beta^2)\cdot h^3} = \dfrac{\alpha^2\cdot\beta}{(\alpha^2+\beta^2)}$

Dunque, le derivate direzionali in $(0,0)$ esistono.

Verifichiamo ora la differenziabilità di $f(x,y)$ in $(0,0)$:

dalla definizione di differenziale discende che deve essere $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x_0}} \dfrac{f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x_0})-\langle\nabla f(\boldsymbol{x_0}),(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0})\rangle}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0}\|} = 0$

che nel nostro caso, essendo $\boldsymbol{x_0} = (0,0)$, $f(\boldsymbol{x_0}) = 0$, $\nabla f(\boldsymbol{x_0}) = (0,0)$, diventa $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2\cdot y}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0$

Passando a coordinate polari, con $\rho>0$ e $\theta\in[0,2\pi]$, abbiamo che il precedente limite diventa

$\lim_{\rho\to 0^+} \dfrac{\rho^3\cdot\cos^2(\theta)\cdot\sin(\theta)}{\rho^3} = \cos^2(\theta)\cdot\sin(\theta)\neq 0$ in generale. Quindi, $f(x,y)$ non è differenziabile in $(0,0)$.

Conseguentemente, almeno una tra f_x e f_y non è continua in $(0,0)$ e, quindi, $f(x,y)$ non è $C^1(\mathbb{R}^2)$

Infine, la non continuità di f_x oppure di f_y implica la sua non differenziabilità e, pertanto, per il secondo teorema di inversione, segue che nel punto $(0,0)$ è $f_{xy}\neq f_{yx}$

Tuttavia si verifica, tramite calcolo diretto, che le due derivate parziali miste non sono definite in $(0,0)$ ed

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{xy}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{yx}(x,y)$ non esiste.

$$f_x = \frac{2\cdot x\cdot y^3}{(x^2+y^2)^2} \qquad f_{xy} = \frac{6\cdot x^3\cdot y^2-2\cdot x\cdot y^4}{(x^2+y^2)^3}$$