Applicazioni lineari 3

Argomenti: assegnazione di applicazioni lineari **Difficoltà:** ⋆⋆⋆

Prerequisiti: basi, teorema di struttura per applicazioni lineari

Nella seguente tabella vengono descritte delle applicazioni lineari tra due spazi vettoriali V e W. La descrizione consiste nell'indicare l'immagine di alcuni vettori dello spazio di partenza. Si chiede di stabilire se esiste (E) un'applicazione lineare che soddisfa le richieste, ed eventualmente se è unica (U). Nel caso in cui l'applicazione richiesta esista e sia unica, sarebbe opportuno determinare anche la matrice che la rappresenta tra le basi canoniche, nonché dimensione ed una base di ker e immagine.

	V	W	Condizioni	E/U	V	W	Condizioni	E/U	
1)	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$	$(1,2) \to (2,3)$ $(1,3) \to (7,8)$	$\begin{pmatrix}-8&5\\-7&5\end{pmatrix}$	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$	$v_1 = (1,2) \to (2,3) = w_1$ $v_2 = 2v_1$ $(2,4) \to (7,8) \neq 2w_1$	NO	
2)	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$	$v_1 = (1,2) \to (2,3) = w_1$ $v_2 = 2v_1 = (2,4) \to (4,6) = 2w_1$	E	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$	$(1,2) \to (2,3)$ $(1,3) \to (2,3)$	$\begin{pmatrix}2&0\\3&0\end{pmatrix}$	
3)	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$	$(1,2) \to (2,3)$ $(1,1) \to (-1,-2)$ $v_1+v_2 = (2,3) \to (1,0) \neq w_1+w_2$	NO	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$	$(1,2) \to (2,3)$ $(1,1) \to (-1,-2)$ $v_1+v_2 = (2,3) \to (1,1) = w_1+w_2$	$\begin{pmatrix}-5&3\\-7&5\end{pmatrix}$	
4)	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^3$	$(1,1) \to (1,2,3)$ $(2,2) \to (1,2,3)$	NO	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^3$	$(1,1) \to (1,0,-1)$ $(-1,-1) \to (-1,0,1)$	E	
5)	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^3$	$(1,-1) \to (1,2,3)$ $(2,2) \to (1,2,3)$	$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3&-1\\6&-2\\9&-3\end{pmatrix}$	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^3$	$(1,1) \to (0,0,0)$ $(12,11) \to (-1,0,1)$	$\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&-1\end{pmatrix}$	
6)	$\mathbb{R}^3$	$\mathbb{R}^3$	$(0,2,-1) \to (-3,2,-1)$ $(1,-1,-1) \to (1,-1,1)$ $(-1,0,1) \to (-1,0,1)$	$\begin{pmatrix}5&0&3\\0&1&0\\-5&-2&-3\end{pmatrix}$	$\mathbb{R}^3$	$\mathbb{R}^3$	$(-3,2,-1) \to (0,2,-1)$ $(1,-1,1) \to (1,-1,-1)$ $(-1,0,1) \to (-1,0,1)$	—	
7)	$\mathbb{R}^3$	$\mathbb{R}^3$	$(0,1,0) \to (0,0,1)$ $2v_1$ $(0,2,0) \to (0,0,1) = w_1$	—	$\mathbb{R}^3$	$\mathbb{R}^3$	$(0,1,0) \to (0,0,1)$ $(0,0,1) \to (0,0,2)$	E	
8)	$\mathbb{R}^3$	$\mathbb{R}^3$	$(0,1,0) \to (0,0,1)$ $2v_1$ $(0,2,0) \to (0,0,2)$ $2w_1$	E	$\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$	$\mathbb{R}^2$	$x^2+3 \to (0,1)$ $x \to (-2,-1)$	E	
9)	$\mathbb{R}^3$	$\mathbb{R}^3$	$(0,1,0) \to (0,0,1)$ $(0,0,1) \to (0,0,1)$	E	$\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$	$\mathbb{R}^2$	$x+3 \to (-1,3)$ $x+2 \to (-1,3)$	$\begin{pmatrix}0&-1\\0&3\end{pmatrix}$	
10)	$\mathbb{R}^3$	$\mathbb{R}^3$	$(1,1,1) \to (0,0,1)$ $(1,1,0) \to (0,0,2)$ $(1,0,0) \to (0,0,3)$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\3&-1&-1\end{pmatrix}$	$\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$	$\mathbb{R}^3$	$x^2+3 \to (0,1,2)$ $x \to (-2,-1,5)$ $x^2-3 \to (1,0,1)$		$\to \begin{pmatrix}-1/6&-2&1/2\\1/6&-1&1/2\\1/6&5&3/2\end{pmatrix}$
11)	$\mathbb{R}^3$	$\mathbb{R}^3$	$(1,1,1) \to (0,0,1)$ $(1,1,0) \to (0,1,1)$ $(1,0,0) \to (1,1,1)$	$\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&0&-1\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\mathbb{R}_{\leq 4}[x]$	$\mathbb{R}^3$	$x^3+x \to (0,0,1)$ $x^2+2 \to (0,1,2)$ $(x+1)^4 \to (1,2,3)$	E	

