Esercizio 1.

Calcolare liminf e limsup per $(x,y)\to(0,0)$ della funzione $f(x,y)=\dfrac{x^2\cdot y}{x^4+y^2}$

1a : per $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

<u>Svolgimento di 1a :</u>

Calcoliamo il limite lungo la direzione dell'asse y e lungo la generica retta per l'origine :

Asse y : $\lim_{t\to 0} f(0,t)=\lim_{t\to 0}\dfrac{0}{t^2}=0$

retta $y=mx$: $\lim_{t\to 0} f(t,mt)=\lim_{t\to 0}\dfrac{m\cdot t^3}{t^4+m^2\cdot t^2}=\lim_{t\to 0}\dfrac{m\cdot t}{t^2+m^2}=0$

Dunque, considerando tutte le sole rette per l'origine, il limite <u>sembrerebbe</u> esistere. Tuttavia, proviamo a calcolarlo lungo le direzioni individuate dalle parabole di equazioni rispettivamente

1. $y=x^2$: $\lim_{t\to 0} f(t,t^2)=\lim_{t\to 0}\dfrac{t^4}{2\cdot t^4}=\dfrac{1}{2}$
2. $y=-x^2$: $\lim_{t\to 0} f(t,-t^2)=\lim_{t\to 0}\dfrac{-t^4}{2\cdot t^4}=-\dfrac{1}{2}$

Il limite, quindi, non esiste. Inoltre, essendo

$f(x,y)\leqslant\dfrac{1}{2}$ sempre, come si ricava da $\dfrac{x^2\cdot y}{x^4+y^2}\leqslant\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2\cdot x^2\cdot y\leqslant x^4+y^2 \Leftrightarrow (x^2-y)^2\geqslant 0$ OK

ed essendo

$f(x,y)\geqslant-\dfrac{1}{2}$ sempre, come si vede da $\dfrac{x^2\cdot y}{x^4+y^2}\geqslant-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2\cdot x^2\cdot y\geqslant -x^4-y^2 \Leftrightarrow (x^2+y)^2\geqslant 0$ OK

segue che

liminf $f(x,y)=-\dfrac{1}{2}$

limsup $f(x,y)=\dfrac{1}{2}$

1b : per $x>0$ e $y>0$

<u>Svolgimento di 1b :</u>

Per l'esercizio 1a sappiamo già che il limite non esiste neppure su questo dominio, essendo lungo la generica retta per l'origine

$y=mx,\ m\in(0,+\infty)$: $\lim_{t\to 0^+} f(t,mt)=\lim_{t\to 0^+}\dfrac{m\cdot t}{t^2+m^2}=0$

ed essendo sul ramo di parabola $y = x^2$ per $x>0$

$$\lim_{t\to 0^+} f(t, t^2) = \lim_{t\to 0^+} \frac{t^4}{2\cdot t^4} = \frac{1}{2}$$

Inoltre, essendo su questo dominio $f(x, y)>0$ sempre, è

liminf $f(x, y) = 0$

mentre, per 1a, segue che

limsup $f(x, y) = \frac{1}{2}$

1c : per $0\leqslant x\leqslant y$

<u>Svolgimento di 1c :</u>

Essendo sul dominio indicato

$$0 \leqslant |f(x, y)| = \frac{x^2\cdot y}{x^4+y^2} \leqslant \frac{x^2\cdot y}{x^4+x^2} = \frac{y}{1+x^2} \leqslant y$$

Dunque, è

$$\lim_{(x, y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$$

1d : per $x>0$ e $y\leqslant x^2$

<u>Svolgimento di 1d :</u>

Poiché nel dominio in esame sono contenuti, per $x>0$, i due rami delle parabole di rispettive equazioni $y = x^2$ e $y = -x^2$, sui quali la funzione data assume valore massimo positivo e massimo negativo, come in 1a, abbiamo che

liminf $f(x, y) = -\frac{1}{2}$

limsup $f(x, y) = \frac{1}{2}$

Esercizio 2.

Calcolare liminf e limsup per $(x,y)\to(0,0)$ di $f(x,y)=\dfrac{x\cdot y^2}{x^4+y^2}$

2a : per $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

<u>Svolgimento di 2a :</u>

Essendo

$$0\leqslant\left|\frac{x\cdot y^2}{x^4+y^2}\right|=\frac{|x|\cdot y^2}{x^4+y^2}\leqslant\frac{|x|\cdot y^2}{y^2}=|x|$$

abbiamo che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$$

Poiché il limite esiste su tutto $\mathbb{R}^2$, esso esisterà anche su tutte le sue restrizioni. Quindi, avremo che anche su tutti gli altri domini, indicati con 2b, 2c e 2d, è

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$$

Esercizio 3.

Calcolare liminf e limsup per $(x,y)\to(0,0)$ della funzione $f(x,y)=\dfrac{x^3\cdot y}{x^4+y^2}$

3a : per $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

Svolgimento di 3a :

Con il seguente cambio di variabili, $\begin{matrix} x=z \\ y=w^2 \end{matrix}$ per $y>0$ e $\begin{matrix} x=z \\ y=-w^2 \end{matrix}$ per $y<0$, tale che $(z,w)\to(0,0)$ per $(x,y)\to(0,0)$, otteniamo che la funzione data diventa, rispettivamente,

$$f_1(z,w)=\frac{z^3\cdot w^2}{z^4+w^4} \quad \text{e} \quad f_2(z,w)=-\frac{z^3\cdot w^2}{z^4+w^4}$$

Passando adesso a coordinate polari, segue che $f_1(z,w)$ diventa

$$f_1(\rho,\theta)=\rho\cdot\frac{\cos^3(\theta)\cdot\sin^2(\theta)}{\cos^4(\theta)+\sin^4(\theta)} \quad \text{con} \quad \rho>0 \quad \text{e} \quad \theta\in[0,2\pi]$$

Il denominatore $d(\theta)=\cos^4(\theta)+\sin^4(\theta)$, essendo una funzione continua di θ sull'intervallo in esame (somma di due quadrati che non si annullano mai contemporaneamente), per Weierstrass avrà un minimo $m>0$ tale che

$$0\leqslant|f_1(\rho,\theta)|=\rho\cdot\frac{|\cos^3(\theta)|\cdot\sin^2(\theta)}{\cos^4(\theta)+\sin^4(\theta)}\leqslant\frac{\rho}{m}$$

Dunque, per $\rho\to0^+$, abbiamo che

$$0=\lim_{\rho\to0^+}f_1(\rho,\theta)=\lim_{(z,w)\to(0,0)}f_1(z,w)$$

In maniera identica si dimostra che

$$0=\lim_{\rho\to0^+}f_2(\rho,\theta)=\lim_{(z,w)\to(0,0)}f_2(z,w)$$

Pertanto, esiste il limite della funzione data ed è $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$

Poiché il limite esiste su tutto $\mathbb{R}^2$, esso esisterà anche su tutte le sue restrizioni. Quindi, avremo che anche su tutti gli altri domini, indicati con 3b, 3c e 3d, è

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$$

Esercizio 4.

Calcolare liminf e limsup per $(x, y) \to (0,0)$ della funzione $f(x, y) = \dfrac{x \cdot y}{|x| + y^2}$

4a : per $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

<u>Svolgimento di 4a :</u>

Essendo

$$0 \leqslant \left| \frac{x \cdot y}{|x| + y^2} \right| = \frac{|x| \cdot |y|}{|x| + y^2} \leqslant \frac{|x| \cdot |y|}{|x|} = |y|$$

abbiamo che il limite della funzione data esiste ed è

$$\lim_{(x, y) \to (0,0)} f(x, y) = 0$$

Poiché il limite esiste su tutto $\mathbb{R}^2$, esso esisterà anche su tutte le sue restrizioni. Quindi, avremo che anche su tutti gli altri domini, indicati con 4b, 4c e 4d, è

$$\lim_{(x, y) \to (0,0)} f(x, y) = 0$$

Esercizio 5.

Calcolare liminf e limsup per $(x, y) \to (0,0)$ della funzione $f(x, y) = \dfrac{x}{x^3 + y^3}$

5a : per $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

Svolgimento di 5a :

La funzione è definita su $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq -x\}$

Calcoliamone il limite muovendoci lungo le due parabole, tangenti nell'origine alla bisettrice del 4° quadrante, di equazioni rispettivamente

1. $y = x^2 - x$: $\lim\limits_{t \to 0^+} f(t, t^2 - t) = \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{t}{t^3 + t^6 - t^3 - 3 \cdot t^5 + 3 \cdot t^4} = \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{1}{t^3 \cdot (t^2 - 3 \cdot t + 3)} = +\infty$

2. $y = -x^2 - x$: $\lim\limits_{t \to 0^+} f(t, -t^2 - t) = \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{t}{t^3 - t^6 - t^3 - 3 \cdot t^5 - 3 \cdot t^4} = \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{-1}{t^3 \cdot (t^2 + 3 \cdot t + 3)} = -\infty$

Dunque, il limite non esiste ed è

liminf $f(x, y) = -\infty$

limsup $f(x, y) = +\infty$

5b : per $x > 0$ e $y > 0$

Svolgimento di 5b :

Calcoliamo il limite lungo la bisettrice del 1° quadrante

$$\lim_{t \to 0^+} f(t, t) = \lim_{t \to 0^+} \frac{t}{2 \cdot t^3} = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{2 \cdot t^2} = +\infty$$

e lungo la curva di equazione $y = \sqrt[4]{x}$, la quale, sul dominio in esame, diventa $x = y^4$

$$\lim_{t \to 0^+} f(t^4, t) = \lim_{t \to 0^+} \frac{t^4}{t^{12} + t^3} = \lim_{t \to 0^+} \frac{t}{1 + t^9} = 0$$

Dunque, il limite non esiste e, essendo sul dominio suddetto $f(x, y) \geqslant 0$, abbiamo che

liminf $f(x, y) = 0$

limsup $f(x, y) = +\infty$

5c : per $0 \leqslant x \leqslant y$

Svolgimento di 5c :

Come in 5b, il limite lungo la bisettrice del 1° quadrante è $+\infty$, mentre lungo l'asse y è

$$\lim_{t \to 0^+} f(0,t) = \lim_{t \to 0^+} \frac{0}{t^3} = 0$$

Dunque, come in 5b, il limite non esiste ed è

liminf $f(x,y) = 0$

limsup $f(x,y) = +\infty$

5d : per $x > 0$ e $y \leqslant x^2$

Svolgimento di 5d :

Analogamente all'esercizio 5a, il dominio in esame comprende parte della regione di indeterminazione di $f(x,y)$, costituita dalla bisettrice del 4° quadrante.

Dunque, come in 5a, il limite non esiste ed è

liminf $f(x,y) = -\infty$

limsup $f(x,y) = +\infty$

Esercizio 6.

Calcolare liminf e limsup per $(x, y) \to (0,0)$ della funzione $f(x, y) = \dfrac{x \cdot y}{x^3 + y^3}$

6a : per $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

Svolgimento di 6a :

Calcoliamo il limite lungo le bisettrici del 1° e 3° quadrante :

1° quadrante $\lim\limits_{t \to 0^+} f(t, t) = \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{t^2}{2 \cdot t^3} = \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{1}{2 \cdot t} = +\infty$

3° quadrante $\lim\limits_{t \to 0^-} f(t, t) = \lim\limits_{t \to 0^-} \dfrac{t^2}{2 \cdot t^3} = \lim\limits_{t \to 0^-} \dfrac{1}{2 \cdot t} = -\infty$

Quindi, il limite non esiste ed è

liminf $f(x, y) = -\infty$

limsup $f(x, y) = +\infty$

6b : per $x > 0$ e $y > 0$

Svolgimento di 6b :

Calcoliamo il limite lungo le direzioni individuate dalla bisettrice del 1° quadrante

$$\lim_{t \to 0^+} f(t, t) = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{2 \cdot t} = +\infty$$

e dalla cubica di equazione $y = x^3$

$$\lim_{t \to 0^+} f(t, t^3) = \lim_{t \to 0^+} \frac{t^4}{t^3 + t^9} = \lim_{t \to 0^+} \frac{t}{1 + t^6} = 0$$

Essendo, sul dominio in esame, $f(x, y) \geqslant 0$, segue che

liminf $f(x, y) = 0$

limsup $f(x, y) = +\infty$

6c : per $0 \leqslant x \leqslant y$

Svolgimento di 6c :

Analogamente a 6b, lungo la bisettrice del 1° quadrante, abbiamo che

$$\lim_{t \to 0^+} f(t,t) = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{2 \cdot t} = +\infty$$

mentre lungo l'asse y è

$$\lim_{t \to 0^+} f(0,t) = \lim_{t \to 0^+} \frac{0}{t^3} = 0$$

Dunque, anche in questo caso il limite non esiste e, essendo sul dominio in esame $f(x,y) \geqslant 0$, segue che

liminf $f(x,y) = 0$

limsup $f(x,y) = +\infty$

6d : per $x > 0$ e $y \leqslant x^2$

Svolgimento di 6d :

Poiché nel dominio in esame compare nuovamente parte della regione di indeterminazione della funzione, costituita dalla bisettrice del 4° quadrante, calcoliamo il limite lungo le direzioni individuate dalle parabole, tangenti nell'origine alla suddetta bisettrice, di equazioni rispettivamente

1. $y = x^2 - x$: $\lim_{t \to 0^+} f(t, t^2 - t) = \lim_{t \to 0^+} \frac{t^2 \cdot (t-1)}{t^3 \cdot [1 + (t-1)^3]} = \lim_{t \to 0^+} \frac{t-1}{t^2 \cdot (t^2 - 3 \cdot t + 3)} = -\infty$
2. $y = -x^2 - x$: $\lim_{t \to 0^+} f(t, -t^2 - t) = \lim_{t \to 0^+} \frac{-t^2 \cdot (t+1)}{-t^3 \cdot [(t+1)^3 - 1]} = \lim_{t \to 0^+} \frac{t+1}{t^2 \cdot (t^2 + 3 \cdot t + 3)} = +\infty$

Dunque, il limite non esiste ed è

liminf $f(x,y) = -\infty$

limsup $f(x,y) = +\infty$

Esercizio 7.

Calcolare liminf e limsup per $(x,y)\to(0,0)$ della funzione $f(x,y)=\dfrac{x^2\cdot y}{x^3+y^3}$

7a : per $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

<u>Svolgimento di 7a :</u>

La funzione è definita su $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\neq -x\}$

Calcoliamo il limite lungo la generica retta per l'origine :

$$\lim_{t\to 0} f(t,mt)=\lim_{t\to 0}\frac{m\cdot t^3}{t^3+m^3\cdot t^3}=\frac{m}{1+m^3}$$

Dunque, il limite, poiché varia al variare del parametro m, non esiste.

Studiamo l'andamento della funzione $g(m)=\dfrac{m}{1+m^3}$

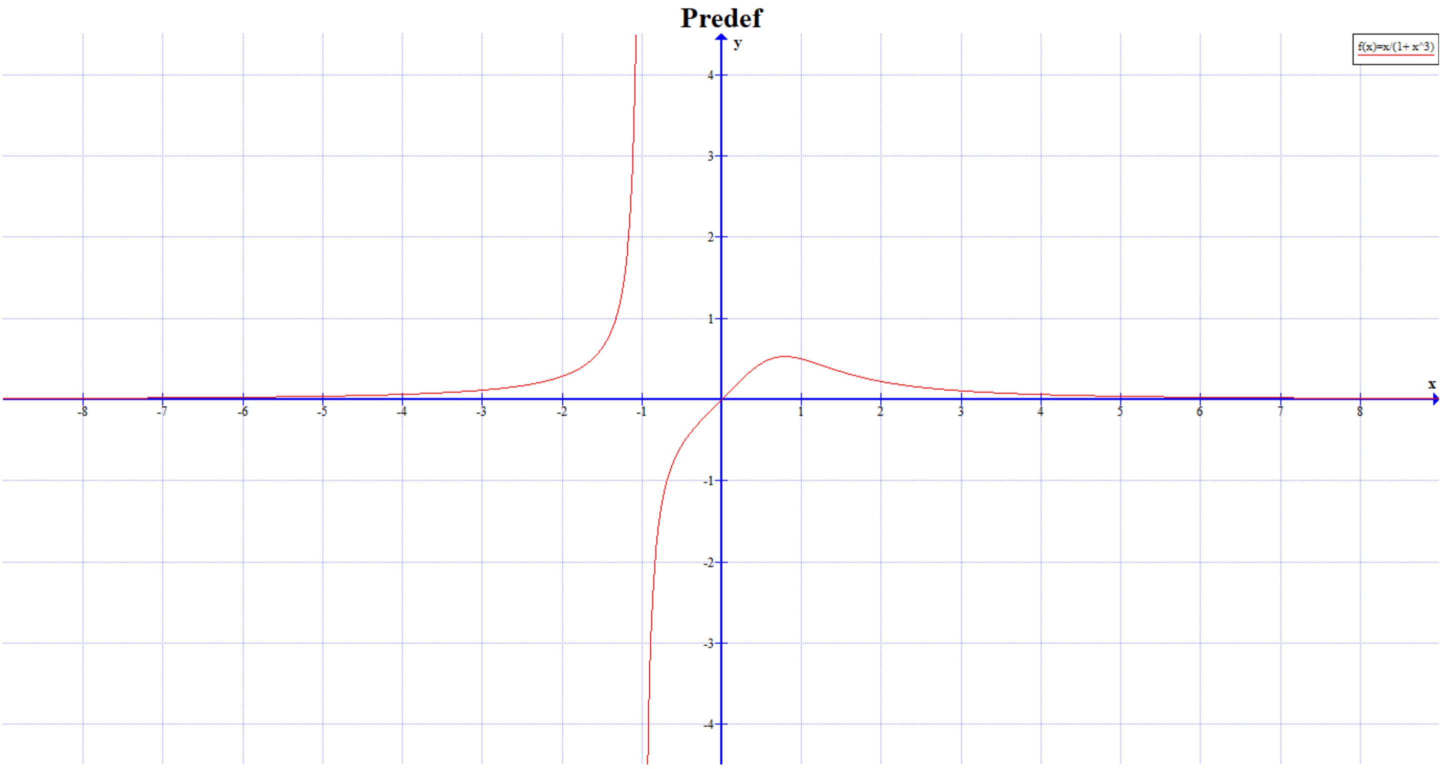
Insieme di esistenza : $E=\{m\in\mathbb{R} : m\neq -1\}$

Studio del segno di g(m) : $g(m)\geqslant 0$ per $m\in(-\infty,-1)\cup[0,+\infty)$

Limiti agli estremi del campo di esistenza : $\lim_{m\to\pm\infty} g(m)=0$ $\lim_{m\to -1^+} g(m)=-\infty$ $\lim_{m\to -1^-} g(m)=+\infty$

Studio della derivata prima : $g'(m)=\dfrac{1-2\cdot m^3}{(1+m^3)^2}$ da cui segue che $g'(m)\geqslant 0 \Leftrightarrow 1-2\cdot m^3\geqslant 0 \Leftrightarrow m\leqslant 1/\sqrt[3]{2}$

Dunque, la funzione $g(m)$ presenta un punto di max $g(1/\sqrt[3]{2})=\dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}$



Dall'andamento di $g(m)$ si deduce che

liminf $f(x,y)=-\infty$

limsup $f(x,y)=+\infty$

7b : per $x>0$ e $y>0$

<u>Svolgimento di 7b :</u>

Per l'esercizio 7a, abbiamo che, nel dominio ora in esame,

$$g(m) = \frac{m}{1+m^3} \quad \text{con} \quad m \in (0,+\infty)$$

Dunque, anche in questo caso il limite, dipendendo dal parametro m, non esiste.

Inoltre, calcolandolo sulla curva $y = \sqrt{x}$, che per $x>0$ e $y>0$ diventa $x = y^2$, otteniamo che

$$\lim_{t\to 0^+} f(t^2, t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{t^5}{t^6+t^3} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t^2}{1+t^3} = 0$$

In conclusione quindi, essendo nel dominio dato $f(x,y) \geqslant 0$, è

liminf $f(x,y) = 0$

Mentre per il limsup possiamo solo affermare che è

limsup $f(x,y) \geqslant \frac{\sqrt[3]{4}}{3}$

7c : per $0 \leqslant x \leqslant y$

<u>Svolgimento di 7c :</u>

Sul dominio in esame è

$$g(m) = \frac{m}{1+m^3} \quad \text{con} \quad m \in [1,+\infty)$$

Inoltre, lungo l'asse y il limite è

$$\lim_{t\to 0^+} f(0,t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{0}{y^3} = 0$$

Da questo, dalla stretta decrescenza di $g(m)$ sull'intervallo dato e dal fatto che $f(x,y) \geqslant 0$, ne deduciamo che

liminf $f(x,y) = 0$

limsup $f(x,y) = \frac{1}{2}$

7d : per $x > 0$ e $y \leqslant x^2$

Svolgimento di 7d :

Poiché sul dominio ora in esame compare nuovamente parte della regione di indeterminazione di $f(x, y)$, costituita dalla bisettrice del 4° quadrante, come in 7a, abbiamo che il limite non esiste ed è

liminf $f(x, y) = -\infty$

limsup $f(x, y) = +\infty$

Esercizio 8.

Calcolare liminf e limsup per $(x, y) \to (0,0)$ della funzione $f(x, y) = \dfrac{y^4}{|x|^3 + |y|^3}$

8a : per $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

<u>Svolgimento di 8a :</u>

In coordinate polari la funzione data diventa

$$f(\rho, \theta) = \rho \cdot \frac{\sin^4(\theta)}{|\cos(\theta)|^3 + |\sin(\theta)|^3} \quad , \quad \rho > 0 \quad \text{e} \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Il denominatore $d(\theta) = |\cos(\theta)|^3 + |\sin(\theta)|^3$ è una funzione continua di θ sempre > 0, in quanto somma di due quantità positive che non si annullano mai contemporaneamente. Quindi, per Weierstrass, $d(\theta)$ presenterà un minimo $m > 0$, da cui segue che

$$0 \leqslant |f(\rho, \theta)| = \rho \cdot \frac{\sin^4(\theta)}{|\cos(\theta)|^3 + |\sin(\theta)|^3} \leqslant \frac{\rho}{m}$$

Essendo ora $\lim\limits_{(x, y) \to (0,0)} f(x, y) = \lim\limits_{\rho \to 0^+} f(\rho, \theta)$

dalla disuguaglianza precedente, per $\rho \to 0^+$, segue che

$$0 = \lim_{\rho \to 0^+} |f(\rho, \theta)| = \lim_{\rho \to 0^+} f(\rho, \theta) = \lim_{(x, y) \to (0,0)} f(x, y)$$

Dunque, il limite esiste ed è 0

Poiché il limite esiste su tutto $\mathbb{R}^2$, esso esisterà anche su tutte le sue restrizioni. Quindi, avremo che anche su tutti gli altri domini, indicati con 8b, 8c e 8d, è

$$\lim_{(x, y) \to (0,0)} f(x, y) = 0$$

Esercizio 9.

Calcolare liminf e limsup per $(x,y)\to(0,0)$ della funzione $f(x,y)=\dfrac{y^4}{x^3+y^3}$

9a : per $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

<u>Svolgimento di 9a :</u>

La funzione è definita sul dominio $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\neq -x\}$

Calcoliamone il limite lungo la bisettrice del 1° e 3° quadrante,

$$\lim_{t\to 0} f(t,t)=\lim_{t\to 0}\frac{t}{2}=0$$

e lungo la parabola di equazione $y=x^2-x$, tangente nell'origine alla retta $y=-x$,

$$\lim_{t\to 0} f(t,t^2-t)=\lim_{t\to 0}\frac{t\cdot(t-1)^4}{1+(t-1)^3}=\lim_{t\to 0}\frac{(t-1)^4}{t^2-3\cdot t+3}=\frac{1}{3}$$

Dunque, il limite non esiste.

Proviamo adesso a calcolarlo spostandoci lungo la curva di equazioni parametriche $x(t)=t^4-t$ e $y(t)=t^3+t$, anch'essa tangente nell'origine alla retta $y=-x$,

$$\lim_{t\to 0^+} f(x(t),y(t))=\lim_{t\to 0^+}\frac{t\cdot(t^2+1)^4}{(t^3-1)^3+(t^2+1)^3}=\lim_{t\to 0^+}\frac{(t^2+1)^4}{3\cdot t+o(t)}=+\infty$$

mentre, avvicinandoci all'origine sulla stessa curva ma dalla direzione opposta, abbiamo che

$$\lim_{t\to 0^-} f(x(t),y(t))=\lim_{t\to 0^-}\frac{t\cdot(t^2+1)^4}{(t^3-1)^3+(t^2+1)^3}=\lim_{t\to 0^-}\frac{(t^2+1)^4}{3\cdot t+o(t)}=-\infty$$

Quindi è

liminf $f(x,y)=-\infty$

limsup $f(x,y)=+\infty$

9b : per $x>0$ e $y>0$

<u>Svolgimento di 9b :</u>

In coordinate polari la funzione data diventa

$$f(\rho,\theta)=\rho\cdot\frac{\sin^4(\theta)}{\cos^3(\theta)+\sin^3(\theta)} \quad \text{con} \quad \rho>0 \ \text{ e } \ \theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

Essendo il denominatore $d(\theta)=\cos^3(\theta)+\sin^3(\theta)$ una funzione continua sempre > 0 perché somma di due quantità positive sull'intervallo considerato, le quali non si annullano mai contemporaneamente, allora, perWeierstrass, esisterà un minimo $m>0$ per $d(\theta)$ tale che

$$0 \leqslant |f(\rho,\theta)| = \rho\cdot \frac{\sin^4(\theta)}{\cos^3(\theta)+\sin^3(\theta)} \leqslant \frac{\rho}{m}$$

Poiché è

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0^+} f(\rho,\theta)$$

segue dalla disuguaglianza precedente che, per $\rho\to 0^+$,

$$0 = \lim_{\rho\to 0^+} |f(\rho,\theta)| = \lim_{\rho\to 0^+} f(\rho,\theta) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

Quindi, sul dominio considerato, il limite esiste ed è 0

9c : per $0\leqslant x\leqslant y$

<u>Svolgimento di 9c :</u>

Poiché il dominio adesso in esame è una restrizione di quello dell'esercizio 9b unito l'asse delle $y>0$, e poiché è

$$\lim_{t\to 0^+} f(0,t) = \lim_{t\to 0^+} t = 0$$

segue che, anche in questo caso, il limite esiste ed è 0

9d : per $x>0$ e $y\leqslant x^2$

<u>Svolgimento di 9d :</u>

Poiché nel dominio in esame compare nuovamente parte della regione di indeterminazione di $f(x,y)$, costituita dalla bisettrice del 4° quadrante, è

liminf $f(x,y) = -\infty$

limsup $f(x,y) = +\infty$

Infatti, come in 9a, è sulla curva di equazioni parametriche $x(t) = t^4-t$ e $y(t) = t^3+t$,

$$\lim_{t\to 0^-} f(x(t),y(t)) = \lim_{t\to 0^-} \frac{t\cdot(t^2+1)^4}{(t^3-1)^3+(t^2+1)^3} = \lim_{t\to 0^-} \frac{(t^2+1)^4}{3\cdot t+o(t)} = -\infty$$

mentre sulla curva di equazioni parametriche $x(t) = t-t^4$ e $y(t) = -t^3-t$, è

$$\lim_{t\to 0^-} f(x(t),y(t)) = \lim_{t\to 0^-} \frac{t\cdot(t^2+1)^4}{-\left[(t^3-1)^3+(t^2+1)^3\right]} = \lim_{t\to 0^-} \frac{(t^2+1)^4}{-3\cdot t+o(t)} = +\infty$$

Esercizio 10.

Calcolare liminf e limsup per $(x,y)\to(0,0)$ della funzione $f(x,y)=\dfrac{x+2\cdot y}{x+y}$

10a : per $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

<u>Svolgimento di 10a :</u>

La funzione data è definita su $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\neq -x\}$

Calcoliamo il limite lungo la generica retta per l'origine :

$$\lim_{t\to 0} f(t,mt)=\lim_{t\to 0}\frac{t+2\cdot m\cdot t}{t+m\cdot t}=\frac{1+2\cdot m}{1+m}$$

Il limite varia al variare del parametro m, dunque non esiste.

Consideriamo la funzione $g(m)=\dfrac{1+2\cdot m}{1+m}$ e studiamone l'andamento :

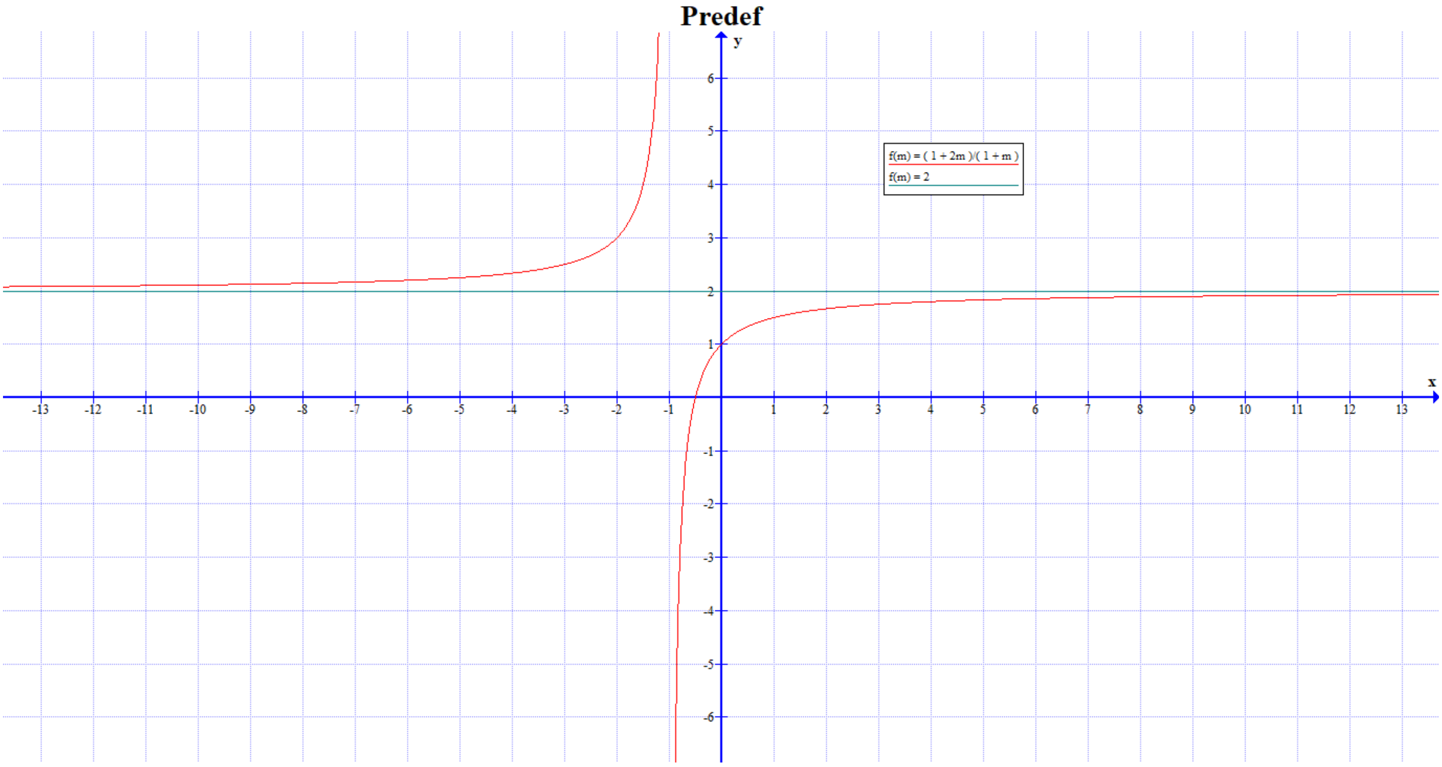
Insieme di esistenza : $E=\{m\in\mathbb{R} : m\neq -1\}$

Eventuali simmetrie : nessuna (la funzione non è né pari né dispari)

Studio del segno : $g(m)\geqslant 0$ per $m\in(-\infty,-1)\cup\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$

Limiti agli estremi del campo di esistenza : $\lim_{m\to\pm\infty} g(m)=2$ $\lim_{m\to -1^+} g(m)=-\infty$ $\lim_{m\to -1^-} g(m)=+\infty$

Studio della derivata prima : $g'(m)=\dfrac{2\cdot(1+m)-(1+2\cdot m)}{(1+m)^2}=\dfrac{1}{(1+m)^2}\Rightarrow g'(m)>0$ sempre



Per quanto evidenziato dallo studio di $g(m)$, si può affermare che

liminf $f(x,y) = -\infty$

limsup $f(x,y) = +\infty$

10b : per $x > 0$ e $y > 0$

Svolgimento di 10b :

Nel dominio adesso in esame la funzione $g(m) = \dfrac{1+2\cdot m}{1+m}$ è definita per $m \in (0,+\infty)$.
Dunque, anche in questo caso, il limite non esiste e, per la stretta monotonia crescente di $g(m)$, avremo che

liminf $f(x,y) = \lim\limits_{m\to 0^+} g(m) = 1$

limsup $f(x,y) = \lim\limits_{m\to +\infty} g(m) = 2$

Infatti, essendo sul dominio dato $f(x,y) \geqslant 1$, come dimostra la disuguaglianza seguente

$$\frac{x+2\cdot y}{x+y} = 1+\frac{y}{x+y} \geqslant 1 \;\Rightarrow \frac{y}{x+y} \geqslant 0 \quad \text{OK}$$

non può che essere liminf $f(x,y) = 1$

Analogamente per limsup, essendo $f(x,y) \leqslant 2$, come indica la disuguaglianza seguente

$$\frac{x+2\cdot y}{x+y} = 1+\frac{y}{x+y} \leqslant 2 \;\Rightarrow\; \frac{y}{x+y} \leqslant 1 \quad \text{OK}$$

non può che essere limsup $f(x,y) = 2$

10c : per $0 \leqslant x \leqslant y$

Svolgimento di 10c :

Analogamente all'esercizio 10b, abbiamo che $g(m) = \dfrac{1+2\cdot m}{1+m}$ è definita adesso per $m \in [\ 1,+\infty\ )$, e per la stretta monotonia crescente è

liminf $f(x,y) = \lim\limits_{m\to 1^+} g(m) = \dfrac{3}{2}$

limsup $f(x,y) = \lim\limits_{m\to +\infty} g(m) = 2$

10d : per $x>0$ e $y\leqslant x^2$

Svolgimento di 10d :

Sul dominio in questione è nuovamente presente parte della regione di indeterminazione di $f(x,y)$, costituita dalla bisettrice del 4° quadrante. Quindi, come in 10a, ipotizziamo che sia

liminf $f(x,y)=-\infty$

limsup $f(x,y)=+\infty$

Infatti, calcoliamo il limite lungo le direzioni individuate dalle parabole, tangenti nell'origine alla suddetta bisettrice, di equazioni rispettivamente

1. $y=x^2-x \Rightarrow \lim_{t\to 0^+} f(t,t^2-t)=\lim_{t\to 0^+}\frac{t+2\cdot t^2-2\cdot t}{t+t^2-t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{2\cdot t-1}{t}=-\infty$
2. $y=-x^2-x \Rightarrow \lim_{t\to 0^+} f(t,-t^2-t)=\lim_{t\to 0^+}\frac{t-2\cdot t^2-2\cdot t}{t-t^2-t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{2\cdot t+1}{t}=+\infty$