

Esercizio 12.

Calcolare liminf e limsup per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ della funzione $f(x, y) = \int_x^y \frac{\arctan(t^3)}{x+y} dt$

12a : per $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

Svolgimento di 12a :

Essendo la funzione integranda $\arctan(t^3)$ una funzione dispari, una sua primitiva $h(t)$ sarà una funzione pari e, quindi, avremo che

$$\int_x^y \frac{\arctan(t^3)}{x+y} dt = h(y) - h(x)$$

Inoltre, per la specifica simmetria della funzione $h(t)$, sarà

$$h(y) - h(x) = h(y) - h(-x)$$

da cui, andando a ritroso, segue che

$$\int_x^y \frac{\arctan(t^3)}{x+y} dt = \int_{-x}^y \frac{\arctan(t^3)}{x+y} dt$$

Applicando adesso il teorema del valor medio, otteniamo

$$f(x, y) = \frac{y+x}{x+y} \cdot \arctan(c^3) \quad \text{con } c \text{ compreso tra } x \text{ ed } y$$

Dunque, in conclusione, avremo che

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{c \rightarrow 0} \arctan(c^3) = 0$$