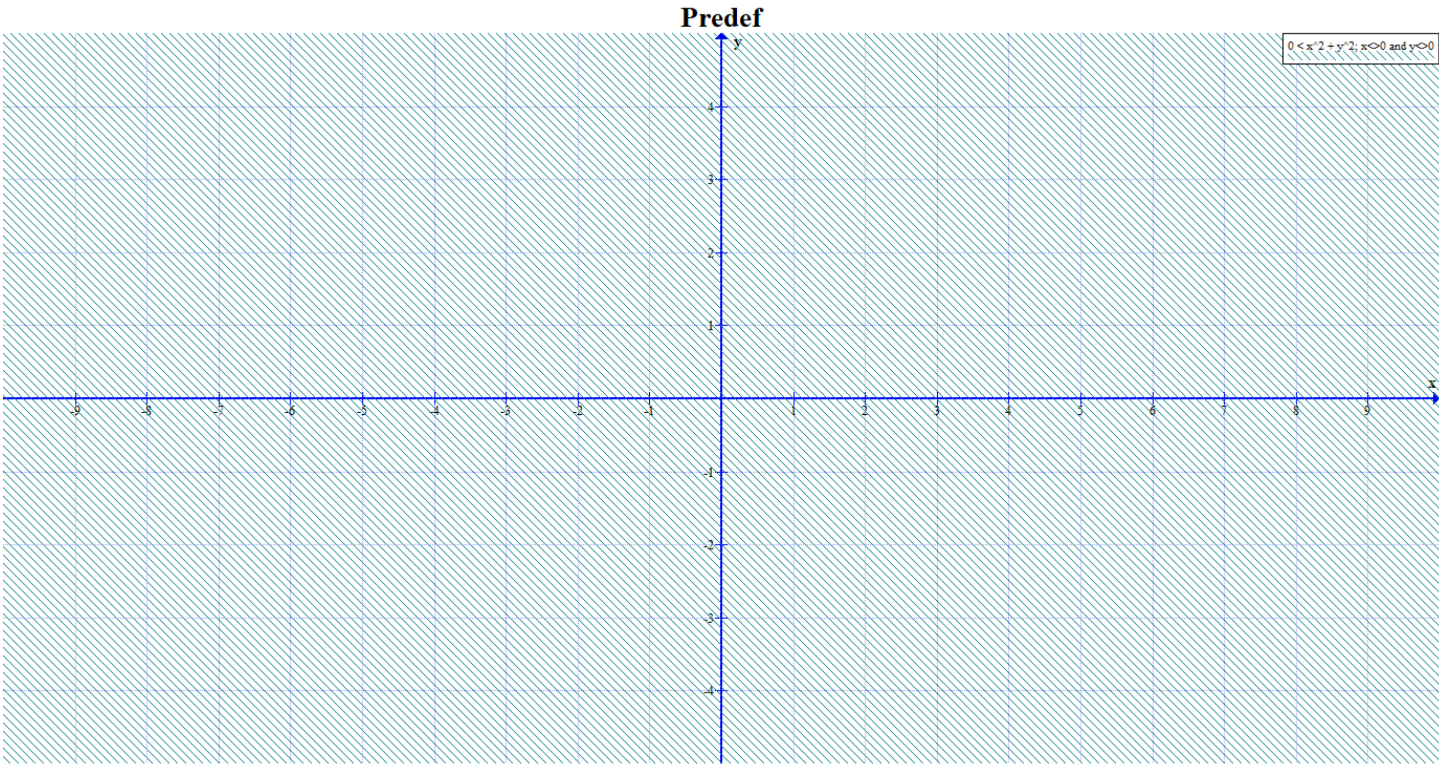
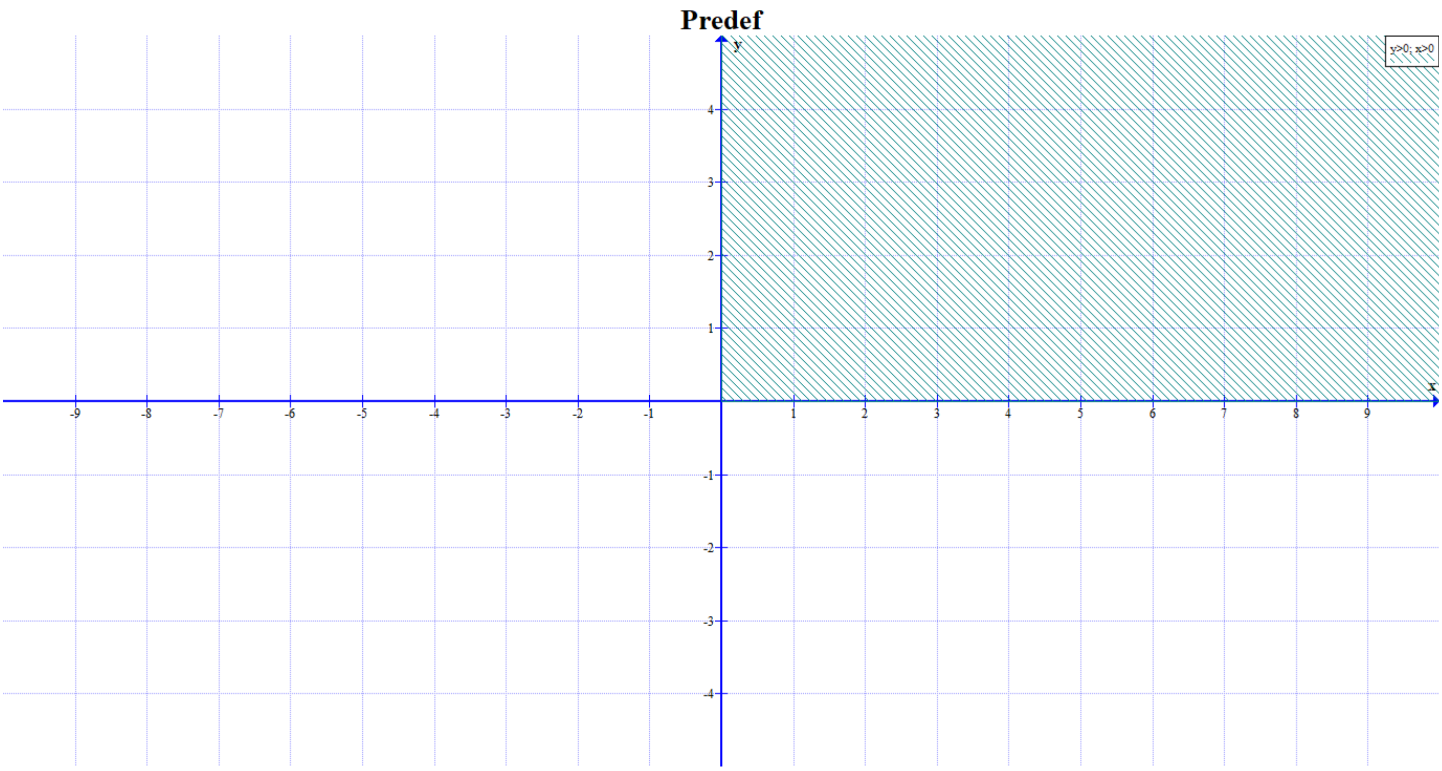
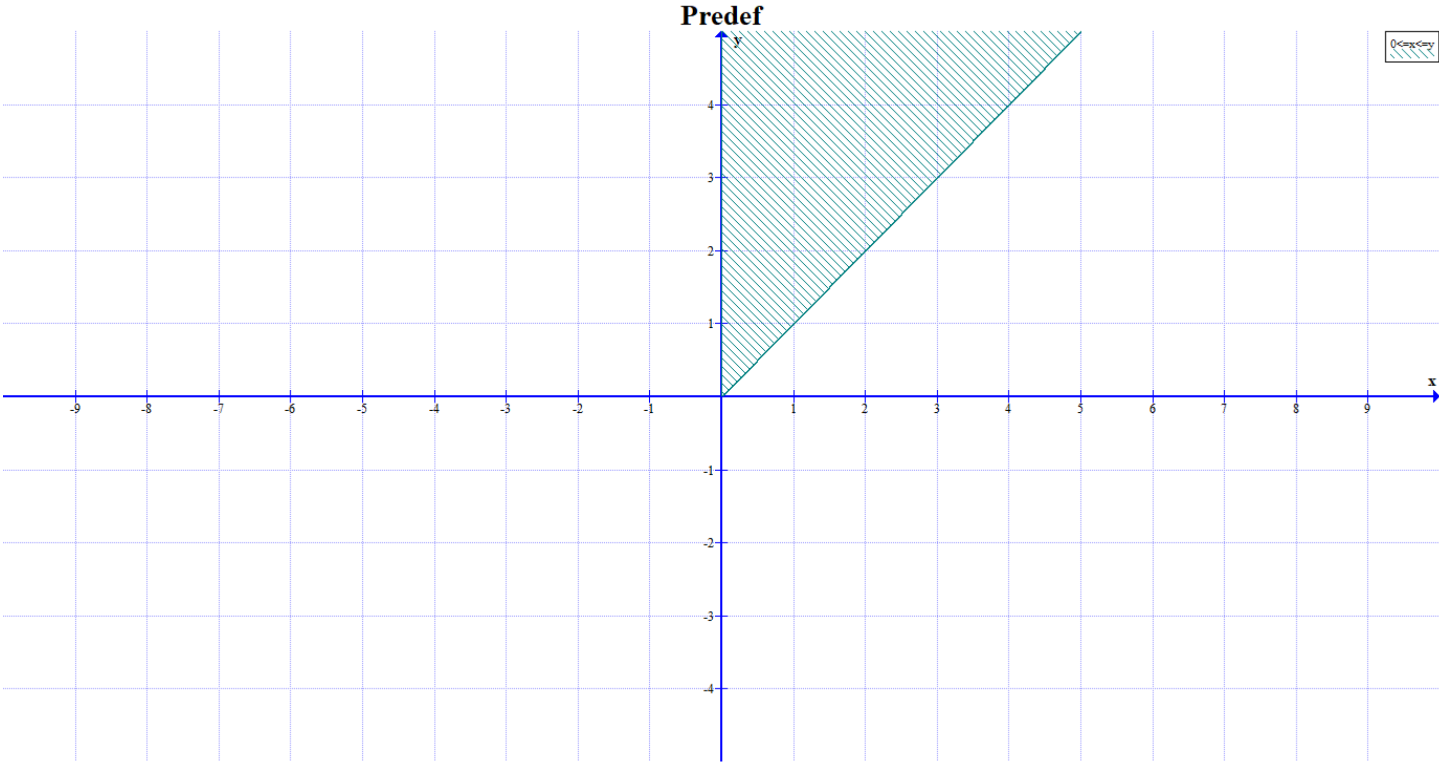
Dominio a :



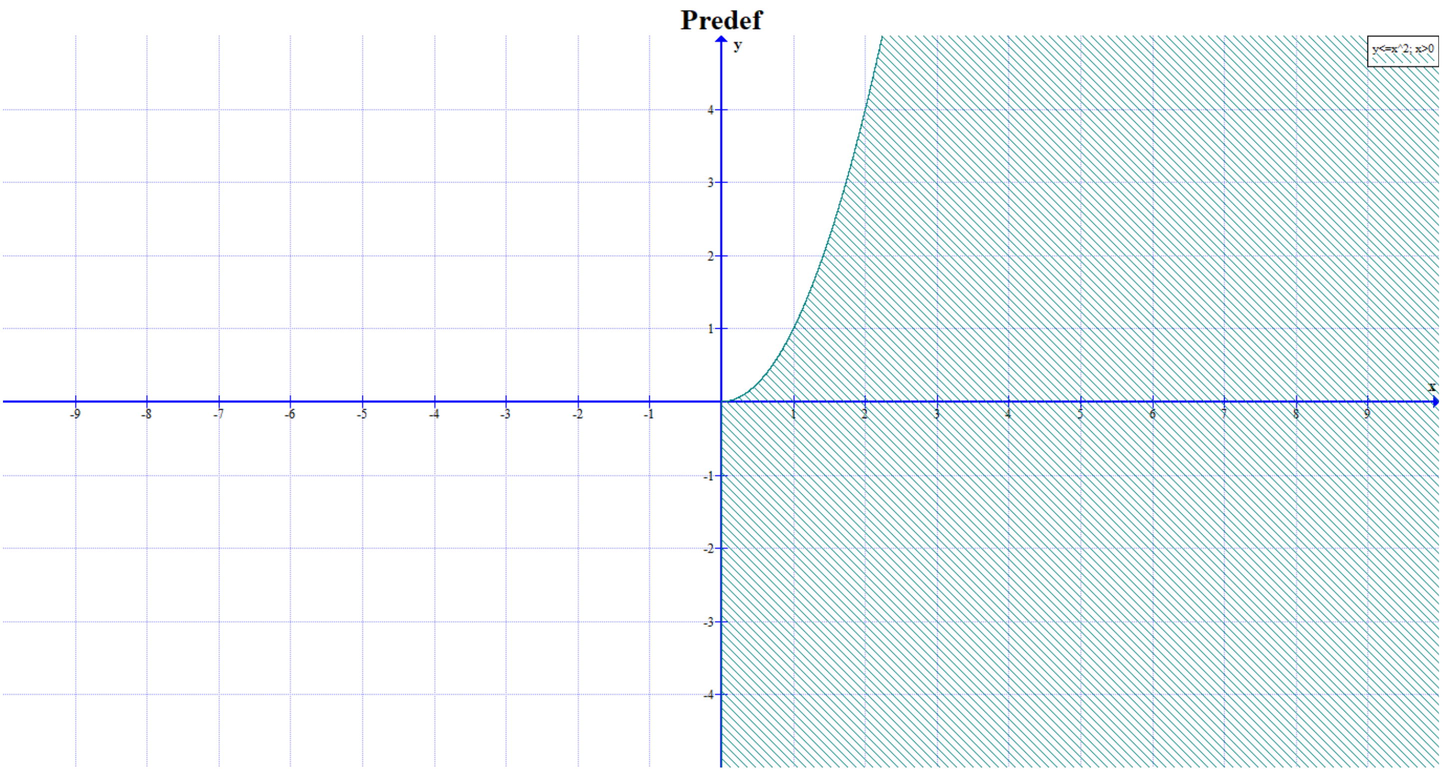
Dominio b :



Dominio c :



Dominio d :



1a. Calcolare liminf e limsup per $(x,y)\to(0,0)$ di $f(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ per $(x,y)\in R^2$.

<u>Svolgimento di 1a :</u>

Asse y : $\lim\limits_{t\to 0} f(0,t)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{0}{0+t^2}=0$

Retta generica per l'origine $y=mt$: $\lim\limits_{t\to 0} f(t,mt)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t^2}{t^2\cdot(1+m^2)}=\dfrac{1}{1+m^2}$

Il limite varia al variare del parametro m , quindi non esiste.

Cerchiamo i valori di liminf e limsup di $f(x,y)$:

Essendo $f(x,y)\geqslant 0 \;\; \forall (x,y)\in R^2$, liminf non può che essere 0.

Studiamo la funzione $g(m)=\dfrac{1}{1+m^2}$:

Insieme di esistenza : $E=\{m:\; m\in R\}$

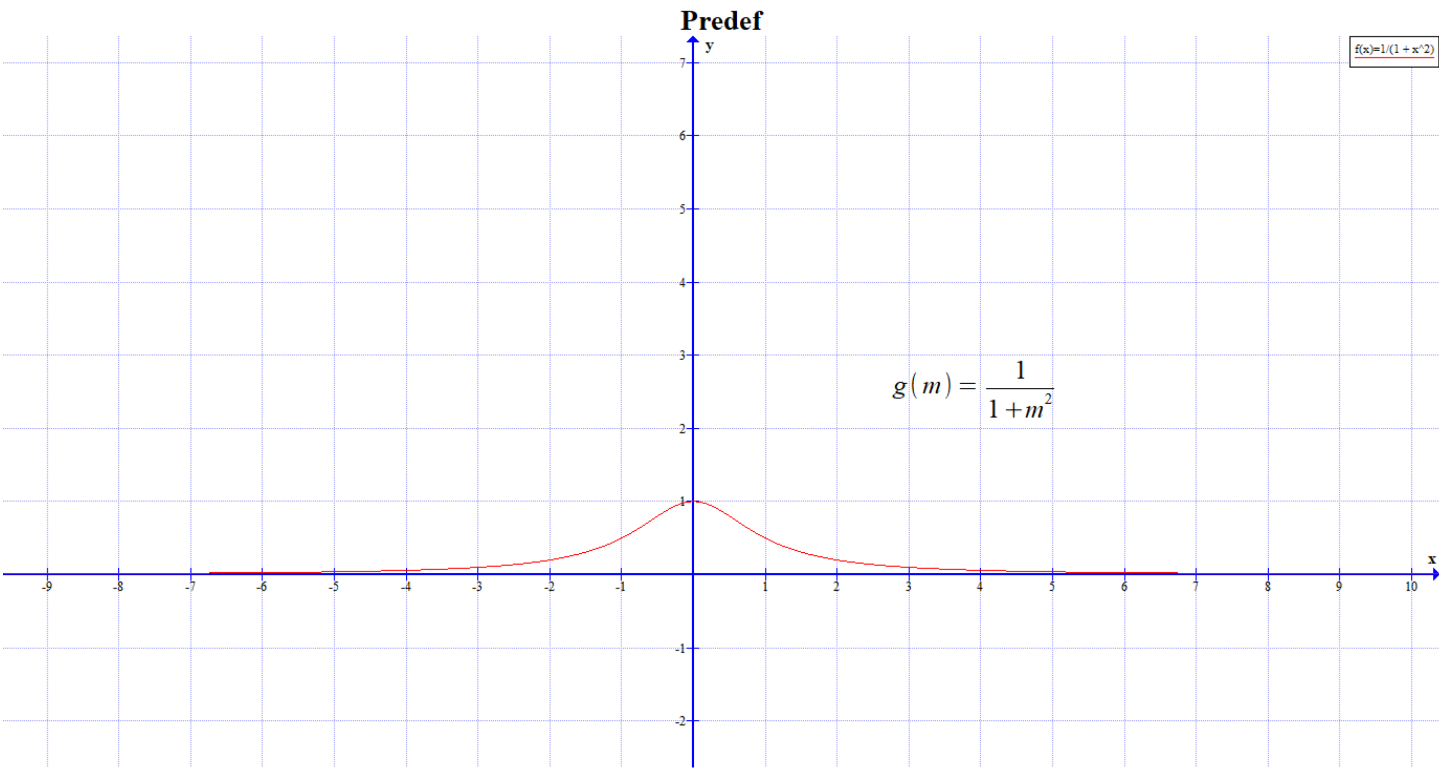
Eventuali simmetrie : essendo $g(m)=g(-m)$, la funzione è pari

Segno della funzione : $g(m)>0$ sempre

Limiti agli estremi dell'insieme di definizione : $\lim\limits_{m\to\pm\infty} g(m)=0$

Studio della derivata prima : $g'(m)=\dfrac{-2\cdot m}{(1+m^2)^2}$ da cui segue che $g'(m)\geqslant 0$ per $m\leqslant 0$

La funzione presenta un max in corrispondenza di $m=0$ ed è $g(0)=1$.



Da questo segue che limsup ≥ 1. Vediamo se è $f(x, y) \leqslant 1$:

$$\frac{x^2}{x^2+y^2} \leqslant 1 \quad \text{da cui segue} \quad x^2 \leqslant x^2+y^2 , \quad \text{cioè} \quad y^2 \geqslant 0$$

Essendo la relazione soddisfatta, non può che essere limsup di $f(x, y) = 1$.

Alternativamente possiamo ragionare in termini di coordinate polari $x = \rho \cdot \cos(\theta)$ e $y = \rho \cdot \sin(\theta)$:

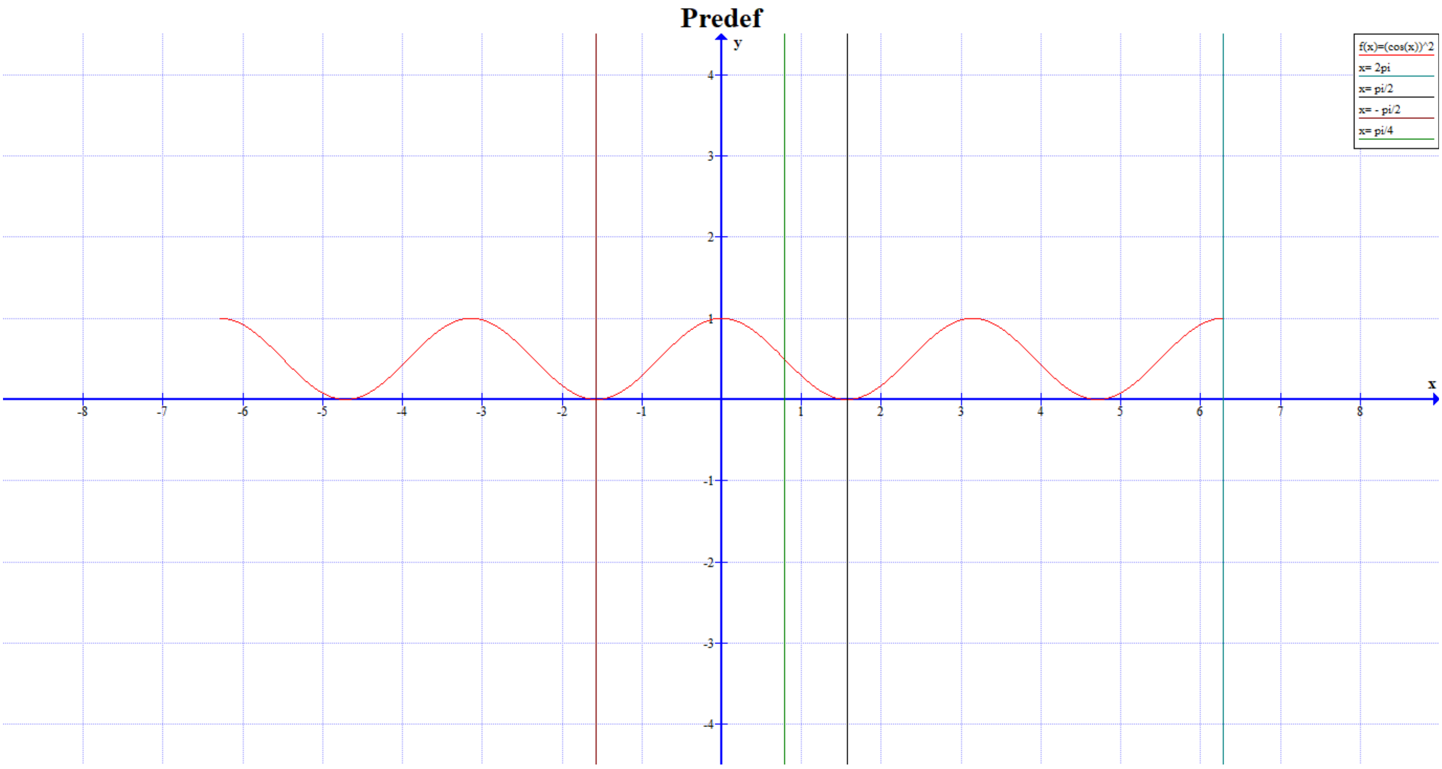
$$f(\rho, \theta) = \frac{\rho^2 \cdot \cos^2(\theta)}{\rho^2 \cdot \left(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\right)} = \cos^2(\theta) \quad \text{per} \quad \rho > 0 \quad \text{e} \quad \theta \in [0, 2 \cdot \pi]$$

La funzione data dipende dunque dalla sola variabile θ ed assume tutti i valori compresi in [0,1] .

Essendo il limite di partenza uguale a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{\rho \to 0^+} \cos^2(\theta) = \cos^2(\theta)$$

esso varia al variare del parametro θ e quindi non esiste.



Infine, essendo $\cos^2(\theta)$ continua in θ ed essendo $0 \leqslant \cos^2(\theta) \leqslant 1$, è

$$\lim_{\theta \to 0} \cos^2(\theta) = 1 = \text{limsup} \ f(x, y)$$

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta) = 0 = \text{liminf} \ f(x, y)$$

1b. Calcolare liminf e limsup per $(x,y)\to(0{,}0)$ di $f(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ per $x>0$ e $y>0$

Svolgimento di 1b :

La funzione è ristretta al primo quadrante (assi esclusi) e in coordinate polari diventa

$$f(\rho,\theta)=\cos^2(\theta) \quad \text{per} \quad \rho>0 \quad \text{e} \quad \theta\in\left(0\,,\frac{\pi}{2}\right)$$

Per considerazioni analoghe a quelle fatte in 1a, essendo $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{\rho\to 0^+}\cos^2(\theta)=\cos^2(\theta)$

segue che :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \quad \text{non esiste}$$

$$\lim_{\theta\to 0^+}\cos^2(\theta)=1= \quad \operatorname{limsup} \ f(x,y)$$

$$\lim_{\theta\to \frac{\pi}{2}^-}\cos^2(\theta)=0= \quad \operatorname{liminf} \ f(x,y)$$

1c. Calcolare liminf e limsup per $(x,y)\to(0{,}0)$ di $f(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ per $0\leqslant x\leqslant y$

Svolgimento di 1c :

La funzione è definita nello spicchio del 1° quadrante delimitato dall'asse y e dalla bisettrice compresi.
In coordinate polari essa diventa

$$f(\rho,\theta)=\cos^2(\theta) \quad \text{per} \quad \rho>0 \quad \text{e} \quad \theta\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$$

Per considerazioni analoghe a quelle fatte in 1a, essendo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{\rho\to 0^+}\cos^2(\theta)=\cos^2(\theta)$$

segue che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \quad \text{non esiste}$$

$$\lim_{\theta\to \frac{\pi}{4}}\cos^2(\theta)=\frac{1}{2}= \quad \operatorname{limsup} \ f(x,y)$$

$$\lim_{\theta\to \frac{\pi}{2}}\cos^2(\theta)=0= \quad \operatorname{liminf} \ f(x,y)$$

1d. Calcolare liminf e limsup per $(x,y)\to(0{,}0)$ di $f(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ per $x>0$ e $y\leqslant x^2$

Svolgimento di 1d :

La funzione è definita nel semipiano delle $x>0$ ed è delimitata in alto dal ramo di parabola $y = x^2$.

Calcoliamo il limite lungo la direzione dell'asse x e lungo la bisettrice del 4° quadrante :

Asse x : $\lim_{t\to 0^+} f(t,0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{t^2}{t^2} = 1$

Bisettrice 4° quadrante : $\lim_{t\to 0^+} f(t,-t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{t^2}{t^2+t^2} = \frac{1}{2}$

Dunque $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ non esiste .

In coordinate polari essa diventa

$$f(\rho,\theta) = \cos^2(\theta), \quad \text{per} \quad \rho > 0 \quad \text{e} \quad \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \arcsin\left(\frac{\sqrt{1+4\cdot\rho^2}-1}{2\cdot\rho}\right) \right]$$

Infatti, dovendo essere al massimo $y = x^2$, segue che :

$$\rho\cdot\sin(\theta) = \rho^2\cdot\cos^2(\theta) \quad \text{da cui} \quad \sin(\theta) = \rho\cdot\cos^2(\theta) \quad \text{e quindi} \quad \rho\cdot\sin^2(\theta)+\sin(\theta)-\rho = 0$$

Otteniamo dunque due possibili espressioni per $\sin(\theta)$:

$$\sin(\theta) = \left\{ \begin{matrix} \frac{-1+\sqrt{1+4\cdot\rho^2}}{2\cdot\rho} \\ \frac{-1-\sqrt{1+4\cdot\rho^2}}{2\cdot\rho} \end{matrix} \right\}$$

Poiché il ramo di parabola è confinato nel 1° quadrante, deve essere $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, da cui discende che $\sin(\theta)\geqslant 0$.

Prendiamo quindi la radice positiva, ottenendo infine che, sulla parabola, è

$$\theta = \arcsin\left(\frac{\sqrt{1+4\cdot\rho^2}-1}{2\cdot\rho}\right)$$

Per le stesse considerazioni fatte in precedenza, segue che, sul dominio in questione, è :

$$0 < \cos^2(\theta) \leqslant 1$$

$$\lim_{\theta\to -\frac{\pi}{2}^+} \cos^2(\theta) = 0 = \quad \liminf \ f(x,y)$$

$$\lim_{\rho\to 0^+} \cos^2\left[\arcsin\left(\frac{\sqrt{1+4\cdot\rho^2}-1}{2\cdot\rho}\right)\right] = \cos^2[\arcsin(0)] = 1 = \quad \limsup \ f(x,y)$$

essendo per De l' Hopital

$$\lim_{\rho \to 0^+} \frac{\sqrt{1+4\cdot\rho^2}-1}{2\cdot\rho} = \lim_{\rho \to 0^+} \frac{8\cdot\rho}{4\cdot\sqrt{1+4\cdot\rho^2}} = 0$$

2a : Calcolare liminf e limsup per $(x, y) \to (0,0)$ di $f(x, y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}$ per $(x, y) \in R^2$

Svolgimento di 2a :

La funzione è definita su tutto R^2 tranne che nell'origine. Calcoliamo il limite lungo le direzioni delle due bisettrici del 1° e del 4° quadrante :

Bisettrice 1° quadrante : $\lim_{t \to 0^+} f(t, t) = \lim_{t \to 0^+} \dfrac{t}{2 \cdot t^2} = +\infty$

Bisettrice 4° quadrante : $\lim_{t \to 0^+} f(t, -t) = \lim_{t \to 0^+} \dfrac{-t}{2 \cdot t^2} = -\infty$

Dunque, $\lim_{(x, y) \to (0,0)} f(x, y)$ non esiste

limsup $f(x, y) = +\infty$

liminf $f(x, y) = -\infty$

2b : Calcolare liminf e limsup per $(x, y) \to (0,0)$ di $f(x, y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}$ per $x > 0$ e $y > 0$

Svolgimento di 2b :

La funzione è definita nel 1° quadrante (assi esclusi). Calcoliamo il limite lungo la direzione della bisettrice del suddetto quadrante e lungo la cubica di equazione $y = x^3$:

bisettrice $y = x$: $\lim_{t \to 0^+} f(t, t) = \lim_{t \to 0^+} \dfrac{t}{2 \cdot t^2} = \lim_{t \to 0^+} \dfrac{1}{2 \cdot t} = +\infty$

cubica $y = x^3$: $\lim_{t \to 0^+} f(t, t^3) = \lim_{t \to 0^+} \dfrac{t^3}{t^2+t^6} = \lim_{t \to 0^+} \dfrac{t}{1+t^4} = 0$

Dunque, $\lim_{(x, y) \to (0,0)} f(x, y)$ non esiste

limsup $f(x, y) = +\infty$

Essendo $f(x, y) > 0$ sempre nel dominio assegnato, non può che essere

liminf $f(x, y) = 0$

2c : Calcolare liminf e limsup per $(x, y) \to (0,0)$ di $f(x, y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}$ per $0 \leqslant x \leqslant y$

Svolgimento di 2c :

La funzione è definita nello spicchio del 1° quadrante delimitato in basso dalla bisettrice e a sinistra dall'asse y.

Passando a coordinate polari, abbiamo che

$$f(\rho,\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\rho} \quad \text{per} \quad \rho > 0 \quad \text{e} \quad \theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Essendo, nel dominio considerato, $\sin(\theta)$ strettamente crescente, segue che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\sin(\theta)}{\rho} \geqslant \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\sqrt{2}}{2\cdot\rho} = +\infty$$

Dunque, il limite esiste ed è

liminf $f(x,y) = +\infty$

limsup $f(x,y) = +\infty$

2d : Calcolare liminf e limsup per $(x,y)\to(0,0)$ di $f(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}$ per $x>0$ e $y \leqslant x^2$

Svolgimento di 2 d :

La funzione è definita sul semipiano delle $x>0$ ed è delimitata in alto dal ramo di parabola di equazione

$$y = x^2$$

In coordinate polari la funzione data, nel dominio assegnato, diventa

$$f(\rho,\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\rho} \quad \text{per} \quad \rho>0 \quad \text{e} \quad \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \arcsin\left(\frac{\sqrt{1+4\cdot\rho^2}-1}{2\cdot\rho}\right) \right]$$

Essendo $-\dfrac{\pi}{2} < \theta \leqslant \arcsin\left(\dfrac{\sqrt{1+4\cdot\rho^2}-1}{2\cdot\rho}\right) < \dfrac{\pi}{2}$, per la monotonia strettamente crescente di $\sin(\theta)$

sull'intervallo sopra indicato, segue che :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\sin(\theta)}{\rho} \leqslant \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\rho} = \lim_{\rho\to 0^+} -\frac{\sqrt{2}}{2\cdot\rho} = -\infty$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\sin(\theta)}{\rho} \leqslant \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\sin\left[\arcsin\left(\frac{\sqrt{1+4\cdot\rho^2}-1}{2\cdot\rho}\right)\right]}{\rho} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\sqrt{1+4\cdot\rho^2}-1}{2\cdot\rho^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{8\cdot\rho}{8\cdot\rho\cdot\sqrt{1+4\cdot\rho^2}} = 1$$

dove nella penultima uguaglianza abbiamo applicato De l'Hopital.

In conclusione, dunque, abbiamo che

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ non esiste

liminf $f(x,y) = -\infty$

limsup $f(x,y) = 1$

3. Calcolare liminf e limsup per $(x,y)\to(0,0)$ di $f(x,y)=\dfrac{y^2}{x^2+y^2}$

3a : per $(x,y)\in R^2$

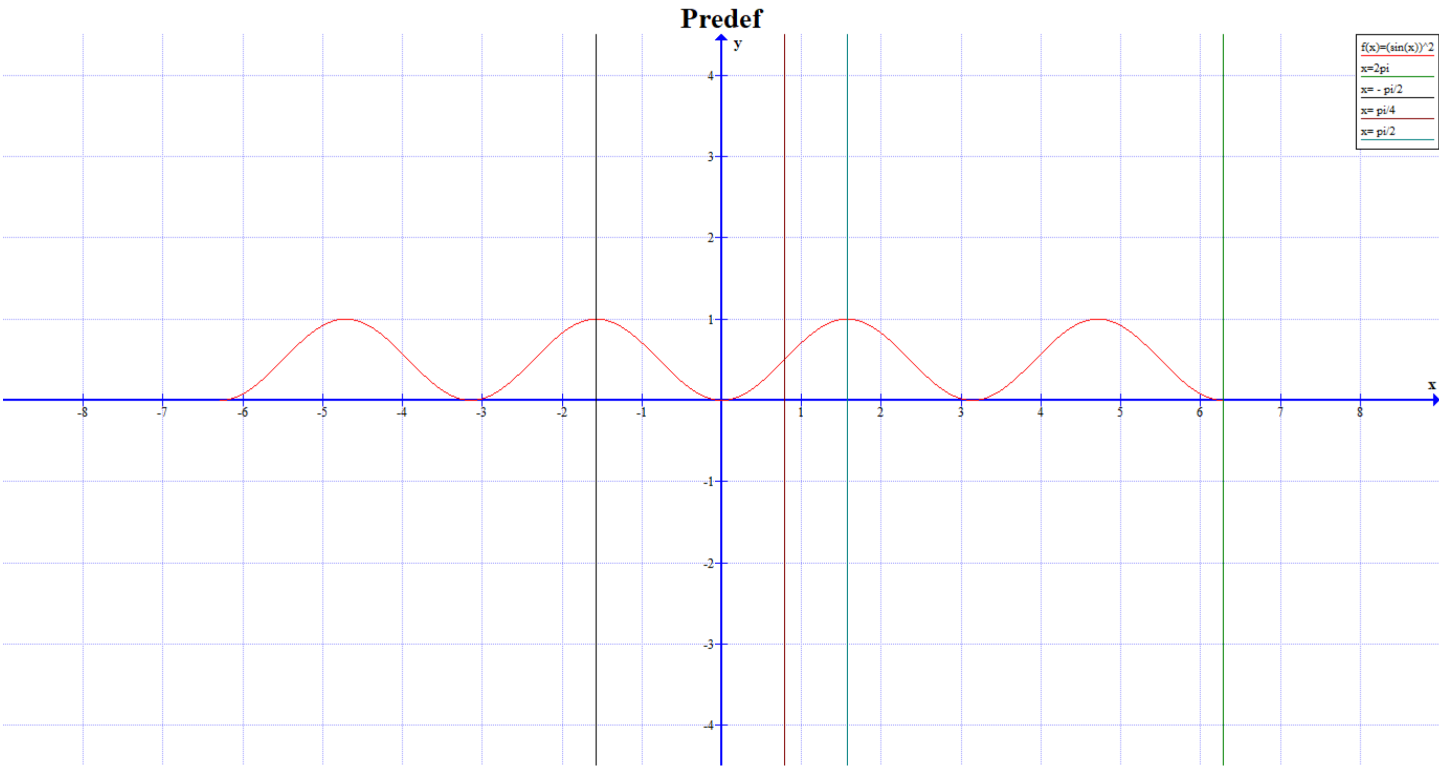
<u>Svolgimento di 3a :</u>

In coordinate polari la funzione diventa

$$f(\rho,\theta)=\sin^2(\theta) \quad \text{per} \quad \rho>0 \quad \text{e} \quad \theta\in[0,2\pi]$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{\rho\to0^+}\sin^2(\theta)=\sin^2(\theta)$$

Il limite varia al variare del parametro θ, quindi non esiste.



Essendo $\sin^2(\theta)$ continua in θ ed essendo, sul dominio dato, $0\leqslant\sin^2(\theta)\leqslant1$, è

$$\lim_{\theta\to0^+}\sin^2(\theta)=0= \quad \operatorname{liminf} \ f(x,y)$$

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\sin^2(\theta)=1= \quad \operatorname{limsup} \ f(x,y)$$

3b : per $x>0$ e $y>0$

<u>Svolgimento di 3b :</u>

In coordinate polari la funzione diventa

$$f(\rho,\theta)=\sin^2(\theta) \quad \text{per} \quad \rho>0 \quad \text{e} \quad \theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

Essendo $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0^+} \sin^2(\theta) = \sin^2(\theta)$, il limite varia al variare di θ e, quindi, non esiste.

Per la stretta monotonia crescente di $\sin^2(\theta)$ sul dominio considerato, segue che

$$\lim_{\theta\to 0^+} \sin^2(\theta) = 0 = \liminf f(x,y)$$

$$\lim_{\theta\to \frac{\pi}{2}^-} \sin^2(\theta) = 1 = \limsup f(x,y)$$

3c : per $0 \leqslant x \leqslant y$

<u>Svolgimento di 3c :</u>

In coordinate polari $f(x,y)$ diventa

$$f(\rho,\theta) = \sin^2(\theta) \quad \text{per} \quad \rho > 0 \quad \text{e} \quad \theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Essendo $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0^+} \sin^2(\theta) = \sin^2(\theta)$, il limite varia al variare di θ e, quindi, non esiste.
Per considerazioni analoghe a quelle fatte nel punto precedente, segue che

$$\lim_{\theta\to \frac{\pi}{4}^+} \sin^2(\theta) = \frac{1}{2} = \liminf f(x,y)$$

$$\lim_{\theta\to \frac{\pi}{2}^-} \sin^2(\theta) = 1 = \limsup f(x,y)$$

3d : per $x > 0$ e $y \leqslant x^2$

<u>Svolgimento di 3d :</u>

In coordinate polari $f(x,y)$ diventa

$$f(\rho,\theta) = \sin^2(\theta) \quad \text{per} \quad \rho > 0 \quad \text{e} \quad \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \arcsin\left(\frac{\sqrt{1+4\cdot\rho^2}-1}{2\cdot\rho}\right)\right)$$

Essendo $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0^+} \sin^2(\theta) = \sin^2(\theta)$, il limite varia al variare di θ e, quindi, non esiste.

Per la stretta monotonia decrescente di $\sin^2(\theta)$ sul dominio considerato, abbiamo che

$$\lim_{\theta\to -\frac{\pi}{2}^+} \sin^2(\theta) = 1 = \limsup f(x,y)$$

$$\lim_{\rho\to 0^+} \sin^2\left[\arcsin\left(\frac{\sqrt{1+4\cdot\rho^2}-1}{2\cdot\rho}\right)\right] = \lim_{\rho\to 0^+} \left[\frac{\sqrt{1+4\cdot\rho^2}-1}{2\cdot\rho}\right]^2 = 0 = \liminf f(x,y)$$

Esercizio 4.

Calcolare liminf e limsup per $(x,y)\to(0,0)$ di $f(x,y)=\dfrac{x\cdot y}{x^2+y^2}$

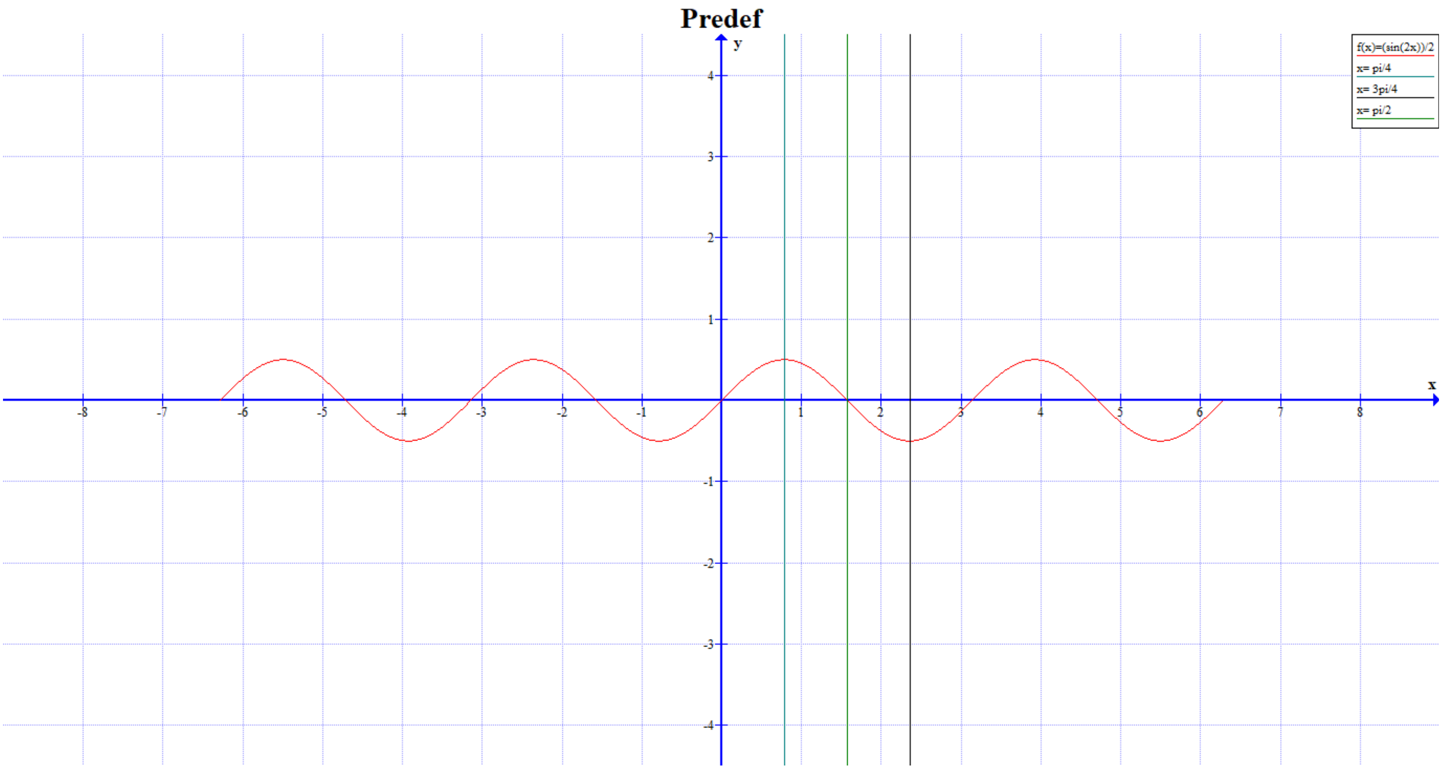
4a : per $(x,y)\in R^2$

<u>Svolgimento di 4a :</u>

In coordinate polari la funzione data diventa

$$f(\rho,\theta)=\frac{\sin(2\cdot\theta)}{2} \quad \text{con} \quad \rho>0 \quad \text{e} \quad \theta\in[0,2\pi]$$

Essendo $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{\rho\to0^+}\frac{\sin(2\theta)}{2}=\frac{\sin(2\theta)}{2}$,



il limite varia al variare del parametro θ e, quindi, non esiste.

Essendo poi $\dfrac{\sin(2\cdot\theta)}{2}$ continua in θ e limitata, con $-\dfrac{1}{2}\leqslant\dfrac{\sin(2\theta)}{2}\leqslant\dfrac{1}{2}$, segue che

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin(2\theta)}{2}=\frac{1}{2}= \quad \limsup \ f(x,y)$$

$$\lim_{\theta\to\frac{3\pi}{4}}\frac{\sin(2\theta)}{2}=-\frac{1}{2}= \quad \liminf \ f(x,y)$$

4b : per $x>0$ e $y>0$

<u>Svolgimento di 4b :</u>

In coordinate polari la funzione data diventa

$$f(\rho,\theta)=\frac{\sin(2\cdot\theta)}{2} \quad \text{con} \quad \rho>0 \quad \text{e} \quad \theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

Essendo $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{\rho\to 0^+}\frac{\sin(2\theta)}{2}=\frac{\sin(2\theta)}{2}$,

il limite dipende dal parametro θ e, quindi, non esiste.

Analogamente a quanto osservato in 4a, è, nel dominio in esame, $0<\frac{\sin(2\theta)}{2}\leqslant\frac{1}{2}$

Pertanto è

$$\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\sin(2\theta)}{2}=0= \quad \liminf \; f(x,y)$$

$$\lim_{\theta\to \frac{\pi}{4}}\frac{\sin(2\theta)}{2}=\frac{1}{2}= \quad \limsup \; f(x,y)$$

4c : per $0\leqslant x\leqslant y$

<u>Svolgimento di 4c :</u>

In coordinate polari la funzione data diventa

$$f(\rho,\theta)=\frac{\sin(2\cdot\theta)}{2} \quad \text{con} \quad \rho>0 \quad \text{e} \quad \theta\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$$

Essendo $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{\rho\to 0^+}\frac{\sin(2\theta)}{2}=\frac{\sin(2\theta)}{2}$,

il limite dipende dal parametro θ e, quindi, non esiste.

Essendo, nel dominio assegnato, $0\leqslant\frac{\sin(2\theta)}{2}\leqslant\frac{1}{2}$ segue che

$$\lim_{\theta\to \frac{\pi}{4}^+}\frac{\sin(2\theta)}{2}=\frac{1}{2}= \quad \limsup \; f(x,y)$$

$$\lim_{\theta\to \frac{\pi}{2}^-}\frac{\sin(2\theta)}{2}=0= \quad \liminf \; f(x,y)$$

4d : per $x>0$ e $y\leqslant x^2$

<u>Svolgimento di 4d :</u>

In coordinate polari la funzione data diventa

$$f(\rho,\theta) = \frac{\sin(2\cdot\theta)}{2} \quad \text{con} \quad \rho>0 \quad \text{e} \quad \theta\in \left(-\frac{\pi}{2}, \arcsin\left(\frac{\sqrt{1+4\rho^2}-1}{2\rho}\right) \right]$$

Essendo, nel dominio considerato, $-\frac{1}{2} \leqslant \frac{\sin(2\theta)}{2} < 0$ per $\rho\to 0^+$, segue che

$$\lim_{\theta\to -\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(2\theta)}{2} = -\frac{1}{2} = \quad \text{liminf} \quad f(x,y)$$

$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{1}{2}\cdot\sin\left[2\arcsin\left(\frac{\sqrt{1+4\rho^2}-1}{2\rho}\right)\right] = 0 = \quad \text{limsup} \quad f(x,y)$$

Esercizio 5.

Calcolare liminf e limsup per $(x, y) \to (0,0)$ di $f(x, y) = \dfrac{xy^3}{x^2 + y^2}$

5a : per $(x, y) \in R^2$

<u>Svolgimento di 5a :</u>

In coordinate polari la funzione diventa

$$f(\rho, \theta) = \frac{\rho^4 \cdot \cos(\theta) \cdot \sin^3(\theta)}{\rho^2} = \rho^2 \cdot \cos(\theta) \cdot \sin^3(\theta) \quad \text{per} \quad \rho > 0 \quad \text{e} \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Essendo

$$\lim_{(x, y) \to (0,0)} f(x, y) = \lim_{\rho \to 0^+} f(\rho, \theta)$$

ed essendo

$$0 \leqslant |f(\rho, \theta)| = \rho^2 \cdot |\cos(\theta)| \cdot |\sin^3(\theta)| \leqslant \rho^2,$$

per $\rho \to 0^+$ segue che il limite esiste ed è

$$\lim_{(x, y) \to (0,0)} f(x, y) = 0$$

Poiché il limite esiste su tutto R^2, esso esisterà anche su tutte le sue restrizioni. Quindi, avremo che anche su tutti gli altri domini, indicati con 5b, 5c e 5d, è

$$\lim_{(x, y) \to (0,0)} f(x, y) = 0$$

Esercizio 6.

Calcolare liminf e limsup per $(x,y)\to(0,0)$ di $f(x,y)=\dfrac{x^2+2\cdot y^2}{x^2+y^2}$

6a : per $(x,y)\in R^2$

<u>Svolgimento di 6a :</u>

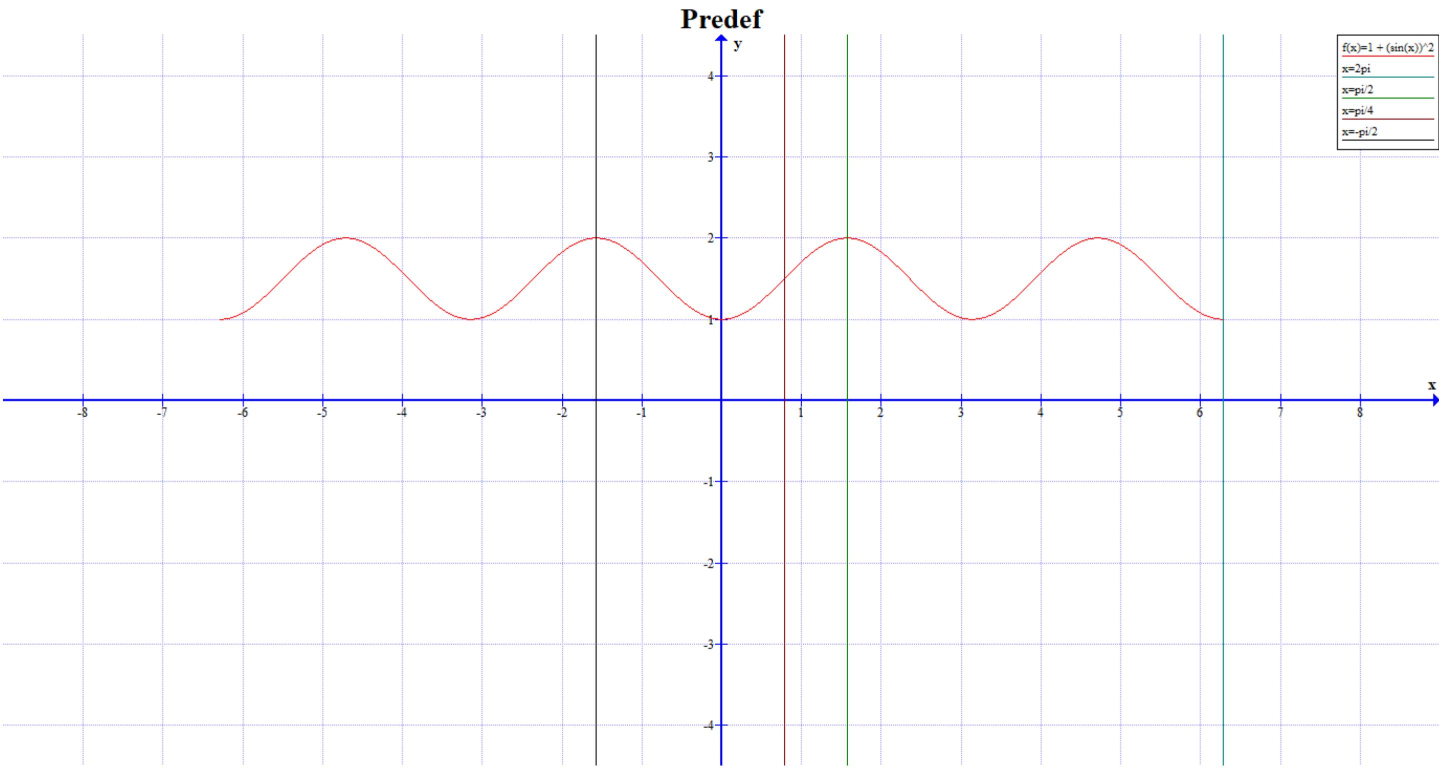
In coordinate polari la funzione diventa

$$f(\rho,\theta)=\frac{\rho^2\cdot[\cos^2(\theta)+2\cdot\sin^2(\theta)]}{\rho^2}=1+\sin^2(\theta) \quad \text{per} \quad \rho>0 \quad \text{e} \quad \theta\in[0,2\pi]$$

Essendo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{\rho\to 0^+} 1+\sin^2(\theta)=1+\sin^2(\theta)$$

il limite varia al variare del parametro θ e, pertanto, non esiste.



Essendo poi, sul dominio considerato, $1+\sin^2(\theta)$ continua e limitata, con $1\leqslant 1+\sin^2(\theta)\leqslant 2$, segue che

$$\lim_{\theta\to 0^+}(1+\sin^2(\theta))=1= \quad \text{liminf} \quad f(x,y)$$

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}(1+\sin^2(\theta))=2= \quad \text{limsup} \quad f(x,y)$$

6b : per $x>0$ e $y>0$

Svolgimento di 6b :

In coordinate polari la funzione è

$$f(\rho,\theta)=(1+\sin^2(\theta)) \quad \text{per} \quad \rho>0 \quad \text{e} \quad \theta\in(0,\frac{\pi}{2})$$

Per considerazioni del tutto analoghe a quelle fatte in 6a, segue che

$\liminf\ f(x,y)=1$

$\limsup\ f(x,y)=2$

6c : per $0\leqslant x\leqslant y$

Svolgimento di 6c :

In maniera del tutto simile a 6a e 6b la funzione in coordinate polari è

$$f(\rho,\theta)=(1+\sin^2(\theta)) \quad \text{per} \quad \rho>0 \quad \text{e} \quad \theta\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$$

Per la stretta monotonia crescente di $(1+\sin^2(\theta))$ sull'intervallo indicato, abbiamo che

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}^+}(1+\sin^2(\theta))=\frac{3}{2}= \ \liminf\ f(x,y)$$

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}^-}(1+\sin^2(\theta))=2= \ \limsup\ f(x,y)$$

6d : per $x>0$ e $y\leqslant x^2$

Svolgimento di 6d :

Come sopra, la funzione in coordinate polari diventa

$$f(\rho,\theta)=(1+\sin^2(\theta)) \quad \text{per} \quad \rho>0 \quad \text{e} \quad \theta\in \ \left(-\frac{\pi}{2},\arcsin\left(\frac{\sqrt{1+4\rho^2}-1}{2\rho}\right) \ \right]$$

Per la stretta monotonia decrescente di $(1+\sin^2(\theta))$ sul dominio in esame, segue che

$$\lim_{\theta\to-\frac{\pi}{2}^+}(1+\sin^2(\theta))=2= \ \limsup\ f(x,y)$$

$$\lim_{\rho\to0^+}\left[1+\left(\frac{\sqrt{1+4\rho^2}-1}{2\rho}\right)^2\right]=1= \ \liminf\ f(x,y)$$

Esercizio 7.

Calcolare liminf e limsup per $(x,y)\to(0,0)$ di $f(x,y)=\dfrac{y^2}{|x|+|y|}$

7a : per $(x,y)\in R^2$

Svolgimento di 7a :

In coordinate polari la funzione data diventa

$$f(\rho,\theta)=\frac{\rho^2\cdot\sin^2(\theta)}{\rho\cdot(|\cos(\theta)|+|\sin(\theta)|)}=\frac{\rho\cdot\sin^2(\theta)}{|\cos(\theta)|+|\sin(\theta)|} \quad , \quad \rho>0 \quad \text{e} \quad \theta\in[0,2\pi]$$

Essendo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{\rho\to 0^+} f(\rho,\theta)$$

ed essendo il denominatore $d(\theta)=|\cos(\theta)|+|\sin(\theta)|$ una funzione continua di θ sull'intervallo considerato

$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$, con $\sin(\theta)$ e $\cos(\theta)$ che non si annullano mai contemporaneamente, segue che :

per Weierstrass esiste un minimo $m>0$ per $d(\theta)$

è $0\leqslant|f(\rho,\theta)|=\dfrac{\rho\cdot\sin^2(\theta)}{|\cos(\theta)|+|\sin(\theta)|}\leqslant\dfrac{\rho}{m}$

per $\rho\to 0^+$ $f(\rho,\theta)\to 0$

Dunque, il limite esiste ed è $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$

Poiché il limite esiste su tutto R^2, esso esisterà anche su tutte le sue restrizioni. Quindi, avremo che anche su tutti gli altri domini, indicati con 7b, 7c e 7d, è

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$$

Esercizio 8.

Calcolare liminf e limsup per $(x, y) \to (0,0)$ di $f(x, y) = \dfrac{x}{x^4 + y^4}$

8a : per $(x, y) \in R^2$

Svolgimento di 8a :

Calcoliamo il limite lungo le due direzioni della bisettrice del 1° e 3° quadrante :

1° quadrante : $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t, t) = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{t}{t^4 + t^4} = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{1}{2\cdot t^3} = +\infty$

3° quadrante : $\lim\limits_{t\to 0^-} f(t, t) = \lim\limits_{t\to 0^-} \dfrac{t}{t^4 + t^4} = \lim\limits_{t\to 0^-} \dfrac{1}{2\cdot t^3} = -\infty$

Dunque il limite non esiste ed è

liminf $f(x, y) = -\infty$

limsup $f(x, y) = +\infty$

8b : $x > 0$ e $y > 0$

Svolgimento di 8b :

Calcoliamo il limite lungo tre direzioni, la bisettrice del 1° quadrante e le curve di equazione rispettivamente $y = \sqrt[4]{x}$ e $y = \sqrt[8]{x}$:

bisettrice 1° quadrante : $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t, t) = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{t}{t^4 + t^4} = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{1}{2\cdot t^3} = +\infty$

$y = \sqrt[4]{x}$: $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t^4, t) = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{t^4}{t^{16} + t^4} = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{1}{t^{12} + 1} = 1$

$y = \sqrt[8]{x}$: $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t^8, t) = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{t^8}{t^{32} + t^4} = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{t^4}{t^{28} + 1} = 0$

Il limite, pertanto, non esiste ed, essendo $f(x, y) > 0$ su tutto il dominio considerato, non può che essere

liminf $f(x, y) = 0$

limsup $f(x, y) = +\infty$

8c : per $0 \leqslant x \leqslant y$

Svolgimento di 8c :

Calcoliamo il limite lungo le direzioni dell'asse y e lungo la bisettrice del 1° quadrante :

Asse y : $\lim_{t \to 0^+} f(0,t) = \lim_{t \to 0^+} \frac{0}{t^4} = 0$

bisettrice 1° quadrante : $\lim_{t \to 0^+} f(t,t) = \lim_{t \to 0^+} \frac{t}{t^4+t^4} = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{2 \cdot t^3} = +\infty$

Dunque il limite non esiste ed essendo sul dominio in esame $f(x,y) \geqslant 0$, non può che essere

liminf $f(x,y) = 0$

limsup $f(x,y) = +\infty$

8d : per $x > 0$ e $y \leqslant x^2$

Svolgimento di 8d :

Calcoliamo il limite lungo la direzione della parabola di equazione $y = x^2$ e lungo la curva di equazione $y = -\sqrt[8]{x}$:

parabola $y = x^2$: $\lim_{t \to 0^+} f(t,t^2) = \lim_{t \to 0^+} \frac{t}{t^4+t^8} = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t^3 \cdot (1+t^4)} = +\infty$

curva $y = -\sqrt[8]{x}$: $\lim_{t \to 0^+} f(t^8, -t) = \lim_{t \to 0^+} \frac{t^8}{t^{32}+t^4} = \lim_{t \to 0^+} \frac{t^4}{t^{28}+1} = 0$

Dunque il limite non esiste ed essendo sul dominio in esame $f(x,y) > 0$, non può che essere

liminf $f(x,y) = 0$

limsup $f(x,y) = +\infty$

Esercizio 9.

Calcolare liminf e limsup per $(x,y)\to(0,0)$ di $f(x,y)=\dfrac{x^2\cdot y}{x^4+y^4}$

9a : per $(x,y)\in R^2$

<u>Svolgimento di 9a :</u>

Calcoliamo il limite lungo le direzioni individuate dalle bisettrici del 1° e 4° quadrante :

1° quadrante : $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t,t)=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{t^3}{2\cdot t^4}=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{1}{2\cdot t}=+\infty$

4° quadrante : $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t,-t)=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{-t^3}{2\cdot t^4}=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{-1}{2\cdot t}=-\infty$

Dunque, il limite non esiste ed è

liminf $f(x,y)=-\infty$

limsup $f(x,y)=+\infty$

9b : per $x>0$ e $y>0$

<u>Svolgimento di 9b :</u>

Calcoliamo il limite lungo la bisettrice del 1° quadrante e lungo la cubica di equazione $y=x^3$:

bisettrice 1° quadrante : $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t,t)=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{1}{2\cdot t}=+\infty$

cubica $y=x^3$: $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t,t^3)=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{t^5}{t^4+t^{12}}=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{t}{1+t^8}=0$

Essendo, sul dominio considerato, $f(x,y)>0$ sempre, segue che

liminf $f(x,y)=0$

limsup $f(x,y)=+\infty$

9c : per $0 \leqslant x \leqslant y$

<u>Svolgimento di 9c :</u>

Calcoliamo il limite lungo la direzione dell'asse y e lungo la bisettrice del 1° quadrante :

Asse y : $\lim_{t \to 0^+} f(0,t) = \lim_{t \to 0^+} \frac{0}{t^4} = 0$

bisettrice 1° quadrante : $\lim_{t \to 0^+} f(t,t) = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{2 \cdot t} = +\infty$

Dunque, il limite non esiste ed essendo, sul dominio in esame, $f(x,y) \geqslant 0$ sempre, segue che

liminf $f(x,y) = 0$

limsup $f(x,y) = +\infty$

9d : per $x > 0$ e $y \leqslant x^2$

<u>Svolgimento di 9d :</u>

Calcoliamo il limite lungo le direzioni individuate dalla bisettrice del 4° quadrante e dalla parabola $y = x^2$:

bisettrice 4° quadrante : $\lim_{t \to 0^+} f(t,-t) = \lim_{t \to 0^+} \frac{-t^3}{2 \cdot t^4} = \lim_{t \to 0^+} \frac{-1}{2 \cdot t} = -\infty$

parabola $y = x^2$: $\lim_{t \to 0^+} f(t,t^2) = \lim_{t \to 0^+} \frac{t^4}{t^4 + t^8} = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{1 + t^4} = 1$

Quindi, il limite non esiste ed è

liminf $f(x,y) = -\infty$

Essendo poi sul dominio dato $x^2 \cdot y \leqslant x^4 \leqslant x^4 + y^4$, segue che $f(x,y) \leqslant 1$ sempre e quindi è

limsup $f(x,y) = 1$

Esercizio 10.

Calcolare liminf e limsup per $(x,y)\to(0,0)$ di $f(x,y)=\dfrac{x^3\cdot y}{x^4+y^4}$

10a : per $(x,y)\in R^2$

Svolgimento di 10a :

Calcoliamo il limite lungo l'asse y e lungo la bisettrice del 1° e 3° quadrante :

Asse y : $\lim\limits_{t\to0} f(0,t)=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{0}{t^4}=0$

Bisettrice 1° e 3° quadrante : $\lim\limits_{t\to0} f(t,t)=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t^4}{2\cdot t^4}=\dfrac{1}{2}$

Dunque, sul dominio in esame, il limite non esiste.

Consideriamo $f(x,y)$ lungo la generica retta per l'origine :

$$\lim_{t\to0} f(t,mt)=\lim_{t\to0}\frac{m\cdot t^4}{t^4\cdot(1+m^4)}=\frac{m}{1+m^4}$$

Studiamo la funzione $g(m)=\dfrac{m}{1+m^4}$:

Insieme di esistenza : $E=\{m:\ m\in R\}$

Eventuali simmetrie : essendo $g(m)=-g(-m)$ la funzione g è dispari

Segno di $g(m)$ *:* $g(m)\geqslant0$ per $m\geqslant0$

Limiti agli estremi dell'insieme di definizione : $\lim\limits_{m\to\pm\infty} g(m)=0$

Studio della derivata prima : $g'(m)=\dfrac{1+m^4-4\cdot m^4}{(1+m^4)^2}=\dfrac{1-3\cdot m^4}{(1+m^4)^2}=\dfrac{(1-\sqrt{3}\cdot m^2)\cdot(1+\sqrt{3}\cdot m^2)}{(1+m^4)^2}$

E' quindi $g'(m)\geqslant0$ per $m\in[-3^{-1/4},\ 3^{-1/4}]$

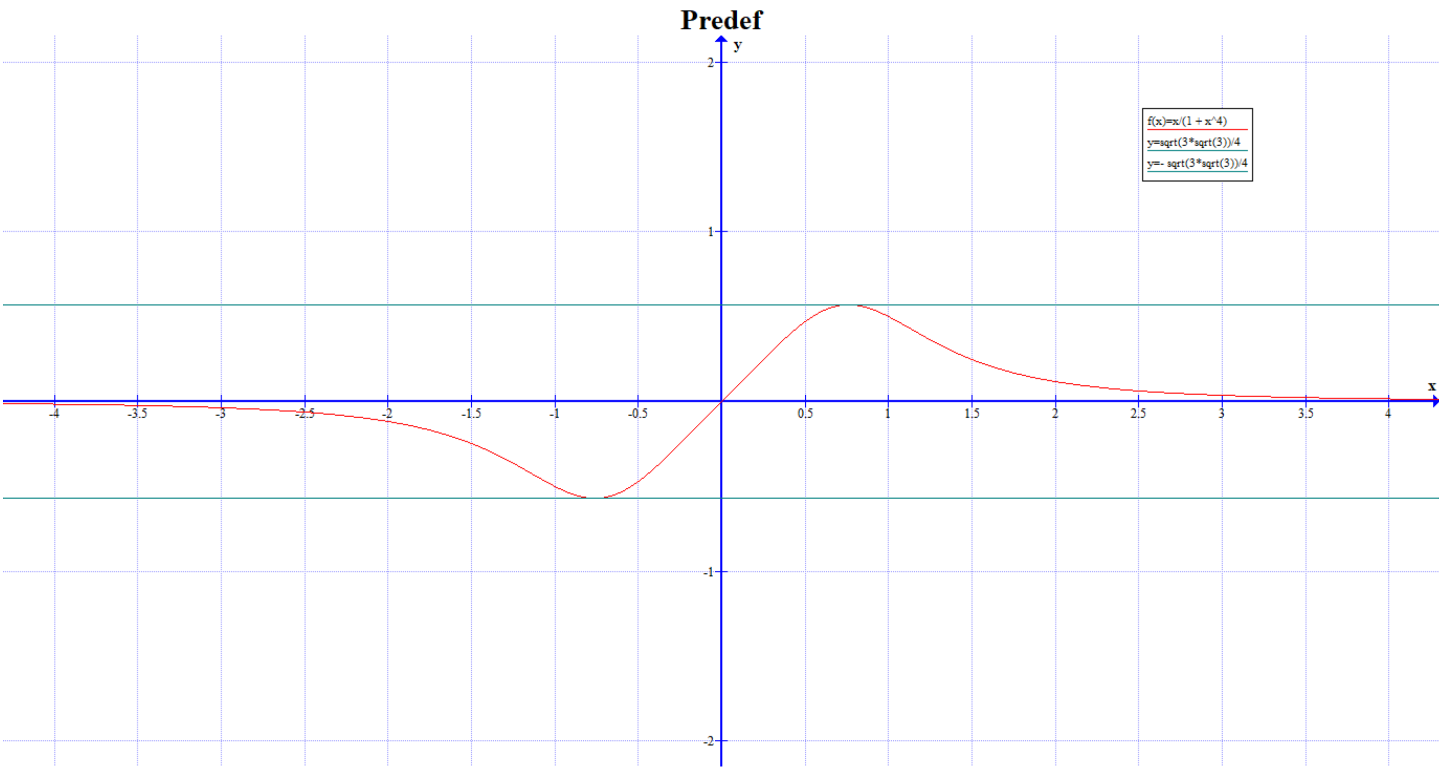
Dunque, la funzione g presenta un punto di max in corrispondenza di $m=3^{-1/4}$, con $g(3^{-1/4})=\dfrac{\sqrt{3\cdot\sqrt{3}}}{4}$

e un punto di min in corrispondenza di $m=-3^{-1/4}$, con $g(-3^{-1/4})=-\dfrac{\sqrt{3\cdot\sqrt{3}}}{4}$

In conclusione possiamo dire che

liminf $f(x,y)\leqslant\dfrac{-\sqrt{3\cdot\sqrt{3}}}{4}$

limsup $f(x,y)\geqslant\dfrac{\sqrt{3\cdot\sqrt{3}}}{4}$



10b : per $x>0$ e $y>0$

<u>Svolgimento di 10b :</u>

Per l'esercizio 10a sappiamo che, lungo la retta generica per l'origine, è

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{t\to 0} f(t, mt) = \lim_{t\to 0} \frac{m}{1+m^4} = \frac{m}{1+m^4} \quad , \quad m\in(0,+\infty)$$

Quindi, il limite varia al variare del parametro m e, pertanto, non esiste.

Calcoliamo il limite lungo la direzione individuata dalla parabola $y = x^2$:

$$\lim_{t\to 0^+} f(t, t^2) = \lim_{t\to 0^+} \frac{t^5}{t^4+t^8} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t}{1+t^4} = 0$$

Essendo, sul dominio in esame, $f(x,y)>0$ sempre, non può che essere

$\liminf\ f(x,y) = 0$

mentre per limsup vale ancora la relazione

$\limsup\ f(x,y) \geqslant \frac{\sqrt{3\cdot\sqrt{3}}}{4}$

10c : per $0 \leqslant x \leqslant y$

Svolgimento di 10c :

Come per 10b, lungo la generica retta per l'origine, abbiamo che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{t\to 0} f(t, mt) = \lim_{t\to 0} \frac{m}{1+m^4} = \frac{m}{1+m^4} \quad , \quad m \in \ [1,+\infty)$$

e, dunque, anche in questo caso il limite non esiste.

Lungo la direzione dell'asse y abbiamo

$$\lim_{t\to 0^+} f(0,t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{0}{t^4} = 0$$

Come in 10b, essendo sul dominio dato $f(x,y) \geqslant 0$ sempre, è

liminf $f(x,y) = 0$

Infine, per la stretta monotonia decrescente di $\dfrac{m}{1+m^4}$ sul dominio, è

limsup $f(x,y) = \dfrac{1}{2}$

10d : per $x > 0$ e $y \leqslant x^2$

Svolgimento di 10d :

Per considerazioni analoghe a quelle fatte negli esercizi 10a, 10b e 10c sull'andamento della funzione $\dfrac{m}{1+m^4}$ sul dominio dato, possiamo dire che è

liminf $f(x,y) \leqslant \dfrac{-\sqrt{3\cdot\sqrt{3}}}{4}$

limsup $f(x,y) = 0$

Esercizio 11.

Calcolare liminf e limsup per $(x,y)\to(0,0)$ di $f(x,y)=\dfrac{x}{x+y}$

11a : per $(x,y)\in R^2$

<u>Svolgimento di 11a :</u>

Calcoliamo il limite lungo le direzioni degli assi :

Asse x : $\lim_{t\to0} f(t,0)=\lim_{t\to0}\dfrac{t}{t}=1$

Asse y : $\lim_{t\to0} f(0,t)=\lim_{t\to0}\dfrac{0}{t}=0$ Dunque $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ non esiste.

Studiamo il comportamento di $f(x,y)$ quando ci avviciniamo all'origine lungo la retta generica $y=m\cdot x$:

$$\lim_{t\to0} f(t,mt)=\lim_{t\to0}\frac{t}{t+m\cdot t}=\lim_{t\to0}\frac{1}{1+m}=\frac{1}{1+m}$$

Consideriamo la funzione $g(m)=\dfrac{1}{1+m}$ e studiamone l'andamento :

Campo di esistenza : $E=\{m\in R : m\neq-1\}$

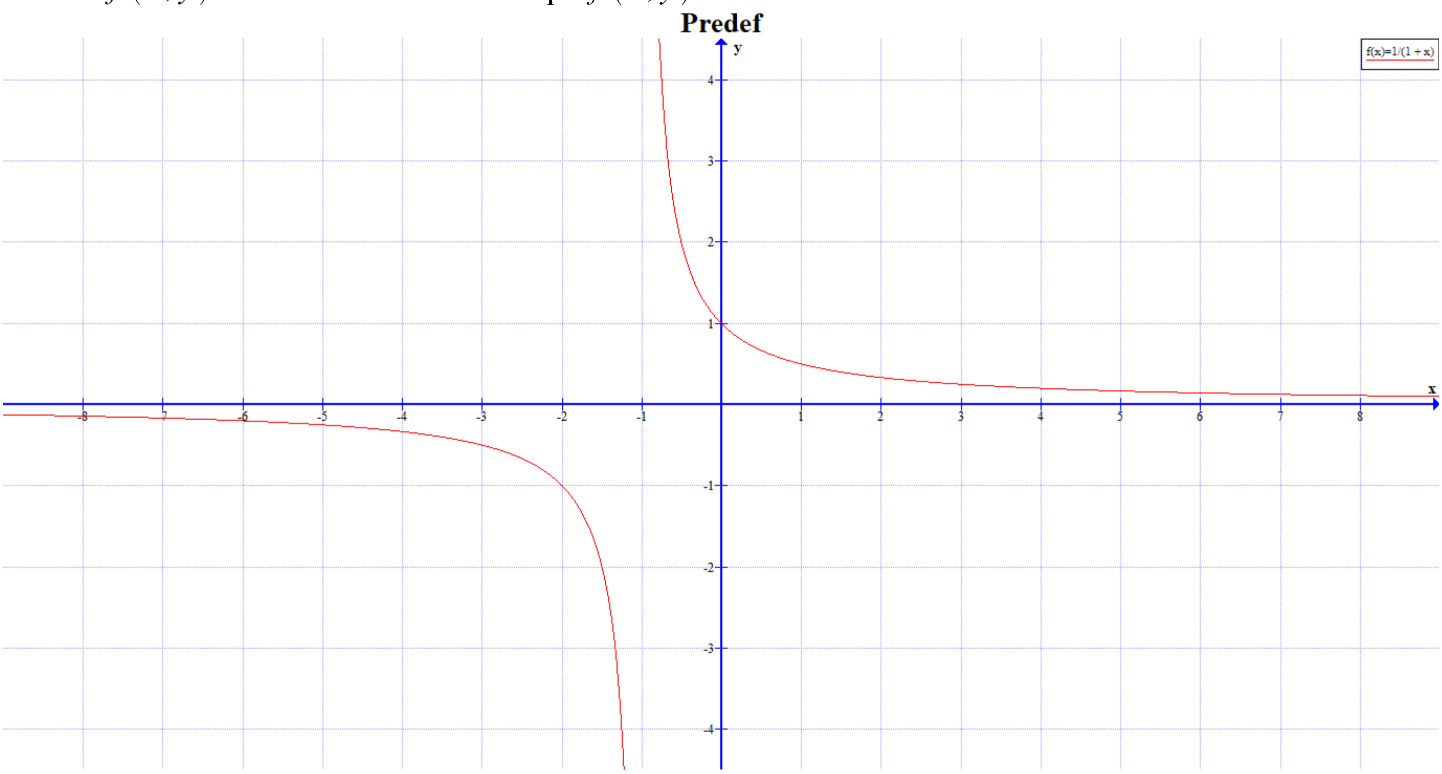
Studio del segno : $g(m)>0$ per $m>-1$

Limiti agli estremi del campo di esistenza : $\lim_{m\to\pm\infty} g(m)=0$ $\lim_{m\to-1^+} g(m)=+\infty$ $\lim_{m\to-1^-} g(m)=-\infty$

Studio della derivata prima : $g'(m)=-\dfrac{1}{(1+m)^2}$ da cui segue che $g'(m)<0$ sempre

Dunque è

liminf $f(x,y)=-\infty$ limsup $f(x,y)=+\infty$



11b : per $x>0$ e $y>0$

Svolgimento di 11b :

Sul questo dominio la funzione $g(m)=\dfrac{1}{1+m}$ è definita per $m\in(0,+\infty)$.

Per la stretta decrescenza di $g(m)$ è dunque

$$\lim_{m\to 0^+} g(m)=1\leqslant \ \text{limsup}\ f(x,y)$$

$$\lim_{m\to +\infty} g(m)=0\geqslant \ \text{liminf}\ f(x,y)$$

Essendo $f(x,y)\leqslant 1$, segue che limsup $f(x,y)=1$

Analogamente, essendo $f(x,y)\geqslant 0$, segue che liminf $f(x,y)=0$

11c : per $0\leqslant x\leqslant y$

Svolgimento di 11c :

Sul dominio in esame, la funzione $g(m)=\dfrac{1}{1+m}$ è adesso definita per $m\in\ [1\ ,+\infty)$.

Come in 11b, per la stretta decrescenza di $g(m)$ è

$$\lim_{m\to 1^+} g(m)=\frac{1}{2}\leqslant \ \text{limsup}\ f(x,y)$$

$$\lim_{m\to +\infty} g(m)=0\geqslant \ \text{liminf}\ f(x,y)$$

Essendo sul dominio in esame $f(x,y)=\dfrac{x}{x+y}\leqslant\dfrac{x}{x+x}=\dfrac{1}{2}$, segue che limsup $f(x,y)=\dfrac{1}{2}$

Infine, come in 11b, essendo su questo dominio $f(x,y)\geqslant 0$, segue che liminf $f(x,y)=0$

11d : per $x>0$ e $y\leqslant x^2$

Svolgimento di 11d :

Poiché adesso la funzione $g(m)=\dfrac{1}{1+m}$ è definita almeno per $m\in(-\infty,-1)\cup(-1\,,0)$, ed essendo

$$\lim_{m\to -1^-} g(m)=-\infty \quad \text{e} \quad \lim_{m\to -1^+} g(m)=+\infty$$

segue che liminf $f(x,y)=-\infty$

limsup $f(x,y)=+\infty$

Esercizio 12.

Calcolare liminf e limsup per $(x,y)\to(0,0)$ di $f(x,y)=\dfrac{y^2}{x+y}$

12a : per $(x,y)\in R^2$

Svolgimento di 12a :

La funzione data è definita su $E=\{(x,y)\in R^2 : y\neq -x\}$

Calcoliamo il limite lungo le direzioni individuate dalle parabole rispettivamente di equazioni

1. $y=x^2-x$: $\displaystyle\lim_{t\to 0} f(t,t^2-t)=\lim_{t\to 0}\frac{t^2\cdot(t-1)^2}{t+t^2-t}=\lim_{t\to 0}(t-1)^2=1$

2. $y=-x^2-x$: $\displaystyle\lim_{t\to 0} f(t,-t^2-t)=\lim_{t\to 0}\frac{t^2\cdot(t+1)^2}{t-t^2-t}=\lim_{t\to 0}-(t-1)^2=-1$

Dunque, il limite non esiste.

Proviamo adesso a calcolare il limite muovendoci lungo le cubiche di equazioni rispettivamente

1. $y=x^3-x$: $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} f(t,t^3-t)=\lim_{t\to 0^+}\frac{t^2\cdot(t^2-1)^2}{t+t^3-t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{(t^2-1)^2}{t}=+\infty$

2. $y=-x^3-x$: $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} f(t,-t^3-t)=\lim_{t\to 0^+}\frac{t^2\cdot(t^2+1)^2}{t-t^3-t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{(t^2+1)^2}{-t}=-\infty$

In conclusione, quindi, è

liminf $f(x,y)=-\infty$

limsup $f(x,y)=+\infty$

12b : per $x>0$ e $y>0$

Svolgimento di 12b :

In coordinate polari la funzione diventa

$$f(\rho,\theta)=\frac{\rho^2\cdot\sin^2(\theta)}{\rho\cdot(\cos(\theta)+\sin(\theta))}=\frac{\rho\cdot\sin^2(\theta)}{\cos(\theta)+\sin(\theta)}\ ,\quad \rho>0 \ \text{ e } \ \theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

Poiché sul dominio considerato è $1<\cos(\theta)+\sin(\theta)\leqslant\sqrt{2}$, segue che

$$0\leqslant|f(\rho,\theta)|=\frac{\rho\cdot\sin^2(\theta)}{\cos(\theta)+\sin(\theta)}\leqslant\rho \quad \text{ed essendo}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{\rho\to 0^+} f(\rho,\theta)=0$$

si conclude che il limite di $f(x,y)$ esiste ed è 0

12c : per $0 \leqslant x \leqslant y$

Svolgimento di 12c :

In maniera del tutto analoga a quanto fatto in 12b, si dimostra che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

essendo il dominio di 12c una restrizione di quello in 12b unito l'asse delle $y>0$. In coordinate polari è

$$\theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$$

12d : per $x>0$ e $y \leqslant x^2$

Svolgimento di 12d :

Poiché nel dominio 12d è nuovamente compresa parte della regione di indeterminazione di $f(x,y)$, costituita dalla bisettrice del 4° quadrante, analogamente a 12a si dimostra che il limite non esiste ed è

liminf $f(x,y) = -\infty$

limsup $f(x,y) = +\infty$

Capitolo 1

Fare

[Spiegare il significato di questo capitolo]

Limiti 1

Argomenti: limiti di funzioni di più variabili **Difficoltà**: ⋆⋆⋆

Prerequisiti: tecniche per il calcolo di limiti in un punto per funzioni di più variabili

In ogni riga è assegnata una funzione, di cui si chiede di calcolare liminf e limsup per $(x, y) \to (0, 0)$. Nelle varie colonne, la funzione si intende definita nel suo "naturale dominio" intersecato l'insieme definito dalle relazioni indicate in testa alla colonna stessa.

		a		b		c		d	
		$(x,y) \in \mathbb{R}^2$		$x > 0,\ y > 0$		$0 \le x \le y$		$x > 0,\ y \le x^2$	
	Funzione	liminf	limsup	liminf	limsup	liminf	limsup	liminf	limsup
1	$\frac{x^2}{x^2+y^2}$	0	1	0	1	0	1/2	0	1
2	$\frac{y}{x^2+y^2}$	$-\infty$	$+\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	1
3	$\frac{y^2}{x^2+y^2}$	0	1	0	1	1/2	1	0	1
4	$\frac{xy}{x^2+y^2}$	-1/2	1/2	0	1/2	0	1/2	-1/2	0
5	$\frac{xy^3}{x^2+y^2}$	0	0	0	0	0	0	0	0
6	$\frac{x^2+2y^2}{x^2+y^2}$	1	2	1	2	3/2	2	1	2
7	$\frac{y^2}{\lvert x\rvert+\lvert y\rvert}$	0	0	0	0	0	0	0	0
8	$\frac{x}{x^4+y^4}$	$-\infty$	$+\infty$	0	$+\infty$	0	$+\infty$	0	$+\infty$
9	$\frac{x^2y}{x^4+y^4}$	$-\infty$	$+\infty$	0	$+\infty$	0	$+\infty$	$-\infty$	1
10	$\frac{x^3y}{x^4+y^4}$	$-\frac{\sqrt{3\sqrt{3}}}{4}$	$\frac{\sqrt{3\sqrt{3}}}{4}$	0	$\frac{\sqrt{3\sqrt{3}}}{4}$	0	1/2	$-\frac{\sqrt{3\sqrt{3}}}{4}$	0
11	$\frac{x}{x+y}$	$-\infty$	$+\infty$	0	1	0	1/2	$-\infty$	$+\infty$
12	$\frac{y^2}{x+y}$	$-\infty$	$+\infty$	0	0	0	0	$-\infty$	$+\infty$