

Scritto d'esame di Algebra Lineare

Pisa, 24 Dicembre 2013

1. Consideriamo in \mathbb{R}^4 il triangolo con vertici nei punti

$$A = (1, 1, 0, 0), \quad B = (2, 0, 3, 1), \quad C = (-1, 0, 2, -1).$$

- (a) Determinare la lunghezza ed il piede dell'altezza uscente dal vertice A .
- (b) Determinare l'area del triangolo.
- (c) Determinare una rappresentazione cartesiana del sottospazio affine di dimensione 2 (in poche parole, il piano) che contiene il triangolo ABC .

2. Consideriamo, nello spazio, la simmetria rispetto al piano di equazione $z = x - 2y$.

- (a) Determinare l'espressione della simmetria.
- (b) Determinare l'immagine del piano $x + y - 3z = 0$,
- (c) Determinare quale isometria dello spazio si ottiene facendo prima tale simmetria e poi la simmetria centrale rispetto al punto $(2, 3, 0)$.

3. Sia $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore od uguale a 3. Consideriamo l'applicazione lineare da $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ in $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ definita da

$$p(x) \rightarrow (x + 2)p'(x).$$

- (a) Determinare la dimensione del ker e dell'immagine dell'applicazione.
- (b) Determinare gli autovalori dell'applicazione ed i relativi autospazi.
- (c) Determinare l'intersezione tra l'immagine e l'insieme dei polinomi dispari (cioè quelli tali che $p(-x) = -p(x)$).

4. Consideriamo la matrice $B_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, dove a è un parametro reale.

- (a) Determinare, al variare del parametro a , la segnatura del prodotto scalare in \mathbb{R}^3 la cui matrice associata nella base canonica è B_a .
- (b) Nel caso particolare $a = 0$, determinare una matrice M tale che $M^t B_0 M$ sia l'identità.
- (c) Determinare, se esistono, i valori di a per cui esiste una matrice *ortogonale* M tale che $M^t B_a M$ sia l'identità.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.