

# Numeri complessi 1

**Argomenti:** Operazioni in forma cartesiana

**Difficoltà:** ★

**Prerequisiti:** Operazioni algebriche, parte reale e immaginaria, modulo e coniugato

Completare la seguente tabella.

$z$	$w$	$z + 2iw$	$\bar{z}w$	$\frac{z}{w}$	$ z - i $	$\Re(w^2)$
1	-1					
1	$i$					
$-i$	$i$					
$1 + i$	$-i$					
1		2				
$i$		1				
$1 + i$		$i$				
		$4 - i$			0	
			1		0	
				2	0	
	$i$		$-1 + i$			
	$-1 + i$			$i$		
		1		$i$		
		1		$1 + i$		
		-6	0			-9
		$\sqrt{5}$	1			-3/5

## Numeri complessi 2

**Argomenti:** Forma trigonometrica ed esponenziale

**Difficoltà:** ★★

**Prerequisiti:** Forma trigonometrica (polare) e relative operazioni

Completare la seguente tabella (per  $z$  e le sue potenze utilizzare sempre la forma cartesiana, per l'argomento  $\theta$  indicare il valore in  $(-\pi, \pi]$ ).

$z$	$\rho$	$\theta$	$z^{29}$	$z^{-63}$	$z^{2008}$
1					
-1					
$i$					
	2	$3\pi/2$			
$1 + i$					
$-1 + i$					
	1	$-\pi/4$			
	$\sqrt{2}$	$-3\pi/4$			
$\sqrt{3} + i$					
$\sqrt{3} - i$					
	2	$\pi/3$			
	1	$-4\pi/3$			
$1 - i\sqrt{3}$					
$-1 + i\sqrt{3}$					
		$\pi/4$			$2^{2008}$
		$5\pi/6$		$-i$	

## Numeri complessi 3

**Argomenti:** Radici  $n$ -esime

**Difficoltà:** ★★★

**Prerequisiti:** Radici  $n$ -esime di numeri complessi

Dato il numero complesso  $z$  e l'intero  $n$ , scrivere in forma cartesiana le radici  $n$ -esime di  $z$  (ordinandole in modo che gli argomenti, pensati in  $[0, 2\pi)$ , risultino crescenti), determinare il raggio  $\rho$  della circonferenza su cui si trovano e rappresentarle sul piano di Gauss.

$z$	$n$	Lista delle radici $n$ -esime	$\rho$	Disegno
4	2			
-9	2			
$2i$	2			
$-1 - i\sqrt{3}$	2			
$-4i$	2			
1	3			
-8	3			
$i$	3			
$-27i$	3			
4	4			
-1	4			
$-8 + 8\sqrt{3}i$	4			
$-8 - 8\sqrt{3}i$	4			
1	6			
-1	6			
16	8			

## Numeri complessi 4

**Argomenti:** Radici di polinomi

**Difficoltà:** ★★★

**Prerequisiti:** Operazioni tra numeri complessi, radici  $n$ -esime

Determinare le radici (complesse) dei seguenti polinomi. Nella risposta elencare le radici in ordine crescente di modulo e, a parità di modulo, in ordine crescente di argomento, pensato in  $[0, 2\pi)$ . Ripetere le radici a seconda della *molteplicità*. Utilizzare la forma cartesiana ovunque possibile, e comunque in tutti i casi in cui l'argomento è un multiplo intero di  $\pi/6$  o  $\pi/4$ .

Polinomio	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$
$x^2 + 1$				
$x^4 - 1$				
$x^4 + 1$				
$x^4 + x^2$				
$x^2 + 2x + 1$				
$x^4 - 2x^2 + 1$				
$x^4 + 2x^2 + 1$				
$x^2 + 4x + 13$				
$x^2 + ix + 6$				
$x^2 + x + 1$				
$x^4 + x^2 + 1$				
$ix^4 + (1 + i)x$				
$x^4 + 2x^2 + 2$				
$x^3 - x + 2i$				
$x^3 + x^2 + x + 1$				
$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$				

## Numeri complessi 5

**Argomenti:** Equazioni sui complessi

**Difficoltà:** ★★ ★★

**Prerequisiti:** Operazioni algebriche, esponenziali, funzioni trigonometriche

Per ciascuno degli insiemi di condizioni proposte, indicare nella colonna “Sol.” quanti sono i numeri complessi  $z$  che le soddisfano. Determinare quindi parte reale e parte immaginaria della soluzione  $z_1$  che ha modulo minore (quando sono più di una scegliere quella che ha argomento, pensato in  $[0, 2\pi)$ , minore).

Condizioni	Sol.	$\Re(z_1)$	$\Im(z_1)$
$z = (i + 1)^{20}$			
$z^3 = i, \Im(z) > 0$			
$z^6 + z^3 + 1 = 0, \Im(z) < 0$			
$z^8 = -1, \Re(z) > 0, \Re(z^2) < 0$			
$z = e^i$			
$z = e^{3i+1}$			
$z = \sin(\pi i)$			
$z = \cos i$			
$z = \cos(i + 3)$			
$e^z = -1, 0 \leq \Im(z) \leq 2\pi$			
$e^z = i, 0 \leq \Im(z) \leq 4\pi$			
$e^{3z} = 3i, 0 \leq \Im(z) \leq 4\pi$			
$e^z = -\sqrt{3} + i, \Im(z) \leq 0$			
$e^z = 3 + 2i, \Im(z) \leq 0$			
$\sin z = 2, 0 \leq \Re(z) \leq 2\pi$			
$\cos z = i, 0 \leq \Re(z) \leq 2\pi, \Im(z) \geq 0$			

## Numeri complessi 6

**Argomenti:** Equazioni sui complessi

**Difficoltà:** ★★ ★★

**Prerequisiti:** Operazioni algebriche, esponenziali, funzioni trigonometriche

Risolvere le seguenti equazioni. Detto  $S$  l'insieme delle soluzioni, nelle risposte indicare la cardinalità  $|S|$  di  $S$ , e le seguenti quantità

$$M = \sup\{\Re(z) : z \in S\}, \quad m = \inf\{\Re(z) : z \in S\}, \quad I = \sup\{\Im(z) : z \in S\},$$

$$R = \sup\{|z| : z \in S\}, \quad r = \inf\{|z| : z \in S\}.$$

Equazione	S	M	m	I	R	r
$z + \bar{z} = 21$						
$z + \bar{z} =  z $						
$\bar{z} = \frac{1}{z}$						
$z - 2i =  z  - 1$						
$z^2 = \bar{z}$						
$z^2 = i z $						
$z^2 = \bar{z} - 1$						
$z + (\bar{z} - 1)^2 = 0$						
$ z z^2 + \bar{z} = 0$						
$z^4 = - \bar{z} $						
$z^3\bar{z}^4 = 1$						
$ z ^2 = 3z^4 + 4$						
$z z ^2 - iz\Re(\bar{z}) + i = 0$						
$e^z = e^{\bar{z}}$						
$e^z = e^{2z}$						
$e^{z+1} =  z $						

## Numeri complessi 7

**Argomenti:** Sistemi di equazioni sui complessi

**Difficoltà:** ★★★★★

**Prerequisiti:** Operazioni algebriche, esponenziali, funzioni trigonometriche

Risolvere le seguenti equazioni o sistemi di equazioni. Nelle risposta indicare, a seconda dei casi, tutte le coppie  $(z, w)$  o tutte le terne  $(z, w, u)$  di soluzioni.

Sistema	Soluzioni
$\begin{cases} z^{1997} + \bar{z}^{1997} = w \\ w^{1997} + \bar{w}^{1997} = z \end{cases}$	
$\begin{cases} z^{1998} + \bar{z}^{1998} = w \\ w^{1998} + \bar{w}^{1998} = z \end{cases}$	
$\begin{cases} z + \bar{w} = 0 \\ \bar{z} +  w w + 6 = 0 \end{cases}$	
$\begin{cases} zw^2 =  z ^2 w  \\ w^2 + 3\bar{z} = 4i \end{cases}$	
$\begin{cases} 2z^2 - w^2 = 0 \\ z^5\bar{w}^6 + 8 = 0 \end{cases}$	
$\begin{cases} z^2w^4 + 5zw^2 + 4 = 0 \\ w^2 +  z  = 0 \end{cases}$	
$\begin{cases} (z - i) w  - \sqrt{2} w ^2 = 0 \\ z + (1 + i)w z - i  = i \end{cases}$	
$\begin{cases} z^4 + \bar{z}^4 = w^2 \\ z^2 - \bar{z}^2 = i\bar{w} \\ w =  z ^3 \end{cases}$	
$\begin{cases} z^2 + 2zw = -1 - w^2 \\ \Re(w^2) = 1 \\ \Im(z^2) = 0 \end{cases}$	
$\begin{cases} (z + 2w)^2 - 4i(z + 2w) = 3 \\ \Re(4w^2) = 1 \\ \Im(z^2) = 4\Re(z) \end{cases}$	
$\begin{cases} z - u = -w(w + \bar{z})^{-1} \\ u = \bar{w} w  + z \\ uw = ( u \bar{w})^{-1} \end{cases}$	

## Test n. ?? – ??

















Numeri complessi 1						
$z$	$w$	$z + 2iw$	$\bar{z}w$	$\frac{z}{w}$	$ z - i $	$\Re(w^2)$
1	-1	$1 - 2i$	-1	-1	$\sqrt{2}$	1
1	$i$	-1	$i$	$-i$	$\sqrt{2}$	-1
$-i$	$i$	$-2 - i$	-1	-1	2	-1
$1 + i$	$-i$	$3 + i$	$-1 - i$	$-1 + i$	1	-1
1	$-i/2$	2	$-i/2$	$2i$	$\sqrt{2}$	-1/4
$i$	$-1/2 - i/2$	1	$-1/2 + i/2$	$-1 - i$	0	0
$1 + i$	$i/2$	$i$	$1/2 + i/2$	$2 - 2i$	1	-1/4
$i$	$-1 - 2i$	$4 - i$	$-2 + i$	$-2/5 - i/5$	0	-3
$i$	$i$	$-2 + i$	1	1	0	-1
$i$	$i/2$	$-1 + i$	$1/2$	2	0	-1/4
$1 - i$	$i$	$-1 - i$	$-1 + i$	$-1 - i$	$\sqrt{5}$	-1
$-1 - i$	$-1 + i$	$-3 - 3i$	$-2i$	$i$	$\sqrt{5}$	0
$1/3$	$-i/3$	1	$-i/9$	$i$	$\sqrt{10}/3$	-1/9
$2/5 - i/5$	$1/10 - 3i/10$	1	$1/10 - i/10$	$1 + i$	$2\sqrt{10}/5$	-2/25
0	$3i$	-6	0	0	1	-9
$(1 - 2i)/\sqrt{5}$	$(1 - 2i)/\sqrt{5}$	$\sqrt{5}$	1	1	$\sqrt{2 + 4/\sqrt{5}}$	-3/5



Test n. ?? – ??

Numeri complessi 2					
$z$	$\rho$	$\theta$	$z^{29}$	$z^{-63}$	$z^{2008}$
1	1	0	1	1	1
-1	1	$\pi$	-1	-1	1
$i$	1	$\pi/2$	$i$	$i$	1
$-2i$	2	$3\pi/2$	$-2^{29}i$	$-2^{-63}i$	$2^{2008}$
$1+i$	$\sqrt{2}$	$\pi/4$	$-2^{14}(1+i)$	$2^{-32}(1+i)$	$2^{1004}$
$-1+i$	$\sqrt{2}$	$3\pi/4$	$2^{14}(1-i)$	$2^{-32}(-1+i)$	$2^{1004}$
$(1-i)/\sqrt{2}$	1	$-\pi/4$	$(-1+i)/\sqrt{2}$	$(1-i)/\sqrt{2}$	1
$-1-i$	$\sqrt{2}$	$-3\pi/4$	$2^{14}(1+i)$	$-2^{-32}(1+i)$	$2^{1004}$
$\sqrt{3}+i$	2	$\pi/6$	$2^{28}(-\sqrt{3}+i)$	$-2^{-63}i$	$2^{2007}(-1+i\sqrt{3})$
$\sqrt{3}-i$	2	$-\pi/6$	$-2^{28}(\sqrt{3}+i)$	$2^{-63}i$	$-2^{2007}(1+i\sqrt{3})$
$1+i\sqrt{3}$	2	$\pi/3$	$2^{28}(1-i\sqrt{3})$	$-2^{-63}$	$-2^{2007}(1+i\sqrt{3})$
$(-1-i\sqrt{3})/2$	1	$-2\pi/3$	$(-1+i\sqrt{3})/2$	1	$(-1-i\sqrt{3})/2$
$1-i\sqrt{3}$	2	$-\pi/3$	$2^{28}(1+i\sqrt{3})$	$-2^{-63}$	$2^{2007}(-1+i\sqrt{3})$
$-1+i\sqrt{3}$	2	$2\pi/3$	$-2^{28}(1+i\sqrt{3})$	$2^{-63}$	$2^{2007}(-1+i\sqrt{3})$
$\sqrt{2}(1+i)$	2	$\pi/4$	$-2^{28}\sqrt{2}(1+i)$	$2^{-64}\sqrt{2}(1+i)$	$2^{2008}$
$(-\sqrt{3}+i)/2$	1	$5\pi/6$	$(\sqrt{3}+i)/2$	$-i$	$-(1+i\sqrt{3})/2$

## Test n. ?? – ??

Numeri complessi 3				
$z$	$n$	Lista delle radici $n$ -esime	$\rho$	Disegno
4	2	2, -2	2	
-9	2	3i, -3i	3	
2i	2	1 + i, -1 - i	$\sqrt{2}$	
$-1 - i\sqrt{3}$	2	$(-\sqrt{2} + i\sqrt{6})/2$ , $(\sqrt{2} - i\sqrt{6})/2$	$\sqrt{2}$	
-4i	2	$\sqrt{2}(-1 + i)$ , $\sqrt{2}(1 - i)$	2	
1	3	1, $(-1 + i\sqrt{3})/2$ , $(-1 - i\sqrt{3})/2$	1	
-8	3	$1 + i\sqrt{3}$ , -2, $1 - i\sqrt{3}$	2	
i	3	$(\sqrt{3} + i)/2$ , $(-\sqrt{3} + i)/2$ , -i	1	
-27i	3	3i, $(-3\sqrt{3} - 3i)/2$ , $(3\sqrt{3} - 3i)/2$	3	
4	4	$\sqrt{2}$ , $i\sqrt{2}$ , $-\sqrt{2}$ , $-i\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	
-1	4	$(1 + i)/\sqrt{2}$ , $(-1 + i)/\sqrt{2}$ , $(-1 - i)/\sqrt{2}$ , $(1 - i)/\sqrt{2}$	1	
$-8 + 8\sqrt{3}i$	4	$\sqrt{3} + i$ , $-1 + i\sqrt{3}$ , $-\sqrt{3} - i$ , $1 - i\sqrt{3}$	2	
$-8 - 8\sqrt{3}i$	4	$1 + i\sqrt{3}$ , $-\sqrt{3} + i$ , $-1 - i\sqrt{3}$ , $\sqrt{3} - i$	2	
1	6	1, $\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ , $\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ , -1, $\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ , $\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$	1	
-1	6	$\frac{\sqrt{3} + i}{2}$ , i, $\frac{-\sqrt{3} + i}{2}$ , $\frac{-\sqrt{3} - i}{2}$ , -i, $\frac{\sqrt{3} - i}{2}$	1	
16	8	$\sqrt{2}$ , $1 + i$ , $i\sqrt{2}$ , $-1 + i$ , $-\sqrt{2}$ , $-1 - i$ , $-i\sqrt{2}$ , $1 - i$	$\sqrt{2}$	

Test n. ?? – ??

Numeri complessi 4				
Polinomio	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$
$x^2 + 1$	$i$	$-i$		
$x^4 - 1$	1	$i$	-1	$-i$
$x^4 + 1$	$(1+i)/\sqrt{2}$	$(-1+i)/\sqrt{2}$	$(-1-i)/\sqrt{2}$	$(1-i)/\sqrt{2}$
$x^4 + x^2$	0	0	$i$	$-i$
$x^2 + 2x + 1$	-1	-1		
$x^4 - 2x^2 + 1$	1	1	-1	-1
$x^4 + 2x^2 + 1$	$i$	$i$	$-i$	$-i$
$x^2 + 4x + 13$	$-2 + 3i$	$-2 - 3i$		
$x^2 + ix + 6$	$2i$	$-3i$		
$x^2 + x + 1$	$(-1 + i\sqrt{3})/2$	$(-1 - i\sqrt{3})/2$		
$x^4 + x^2 + 1$	$(1 + i\sqrt{3})/2$	$(-1 + i\sqrt{3})/2$	$(-1 - i\sqrt{3})/2$	$(1 - i\sqrt{3})/2$
$ix^4 + (1+i)x$	0	$(1+i)/\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[6]{2} e^{11\pi i/12}$	$\sqrt[6]{2} e^{19\pi i/12}$
$x^4 + 2x^2 + 2$	$\sqrt[4]{2} e^{3\pi i/8}$	$\sqrt[4]{2} e^{5\pi i/8}$	$\sqrt[4]{2} e^{11\pi i/8}$	$\sqrt[4]{2} e^{13\pi i/8}$
$x^3 - x + 2i$	$i$	$-(\sqrt{7} + i)/2$	$(\sqrt{7} - i)/2$	
$x^3 + x^2 + x + 1$	$i$	-1	$-i$	
$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$	$e^{2\pi i/5}$	$e^{4\pi i/5}$	$e^{6\pi i/5}$	$e^{8\pi i/5}$

## Test n. ?? – ??

Numeri complessi 5			
Condizioni	Sol.	$\Re(z_1)$	$\Im(z_1)$
$z = (i + 1)^{20}$	1	$-2^{10}$	0
$z^3 = i, \Im(z) > 0$	2	$\sqrt{3}/2$	1/2
$z^6 + z^3 + 1 = 0, \Im(z) < 0$	3	$\cos(10\pi/9)$	$\sin(10\pi/9)$
$z^8 = -1, \Re(z) > 0, \Re(z^2) < 0$	2	$\cos(3\pi/8)$	$\sin(3\pi/8)$
$z = e^i$	1	$\cos 1$	$\sin 1$
$z = e^{3i+1}$	1	$e \cos 3$	$e \sin 3$
$z = \sin(\pi i)$	1	0	$\sinh \pi$
$z = \cos i$	1	$\cosh 1$	0
$z = \cos(i + 3)$	1	$\cosh 1 \cdot \cos 3$	$-\sinh 1 \cdot \sin 3$
$e^z = -1, 0 \leq \Im(z) \leq 2\pi$	1	0	$\pi$
$e^z = i, 0 \leq \Im(z) \leq 4\pi$	2	0	$\pi/2$
$e^{3z} = 3i, 0 \leq \Im(z) \leq 4\pi$	6	$(\log 3)/3$	$\pi/6$
$e^z = -\sqrt{3} + i, \Im(z) \leq 0$	$\infty$	$\log 2$	$-7\pi/6$
$e^z = 3 + 2i, \Im(z) \leq 0$	$\infty$	$\log \sqrt{13}$	$\arctan(2/3) - 2\pi$
$\sin z = 2, 0 \leq \Re(z) \leq 2\pi$	2	$\pi/2$	$\log(\sqrt{3} + 2)$
$\cos z = i, 0 \leq \Re(z) \leq 2\pi, \Im(z) \geq 0$	1	$3\pi/2$	$\log(\sqrt{2} + 1)$

Test n. ?? – ??

Numeri complessi 6						
Equazione	$ S $	$M$	$m$	$I$	$R$	$r$
$z + \bar{z} = 21$	$\infty$	$21/2$	$21/2$	$+\infty$	$+\infty$	$21/2$
$z + \bar{z} =  z $	$\infty$	$+\infty$	$0$	$+\infty$	$+\infty$	$0$
$\bar{z} = \frac{1}{z}$	$\infty$	$1$	$-1$	$1$	$1$	$1$
$z - 2i =  z  - 1$	$1$	$3/2$	$3/2$	$2$	$5/2$	$5/2$
$z^2 = \bar{z}$	$4$	$1$	$-1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1$	$0$
$z^2 = i z $	$3$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1$	$0$
$z^2 = \bar{z} - 1$	$2$	$-1/2$	$-1/2$	$\sqrt{7}/2$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$z + \overline{(\bar{z} - 1)^2} = 0$	$2$	$1/2$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1$	$1$
$ z z^2 + \bar{z} = 0$	$4$	$1/2$	$-1$	$\sqrt{3}/2$	$1$	$0$
$z^4 = - \bar{z} $	$5$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1$	$0$
$z^3\bar{z}^4 = 1$	$1$	$1$	$1$	$0$	$1$	$1$
$ z ^2 = 3z^4 + 4$	$4$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1$	$1$
$z z ^2 - iz\Re(\bar{z}) + i = 0$	$1$	$0$	$0$	$-1$	$1$	$1$
$e^z = e^{\bar{z}}$	$\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$0$
$e^z = e^{2z}$	$\infty$	$0$	$0$	$+\infty$	$+\infty$	$0$
$e^{z+1} =  z $	$\infty$	$+\infty$	$-1$	$+\infty$	$+\infty$	$1$

---

 Test n. ?? – ??
 

---

<b>Numeri complessi 7</b>	
2 soluzioni	$(2^{-1/1996}, 2^{-1/1996}), (-2^{-1/1996}, -2^{-1/1996})$
1 soluzione	$(2^{-1/1997}, 2^{-1/1997})$
1 soluzione	$(3, -3)$
5 soluzioni	$(0, \sqrt{2}(1+i)), (0, -\sqrt{2}(1+i)), (-i, (1+i)/\sqrt{2}), (-i, -(1+i)/\sqrt{2}), (-4i/3, 0)$
2 soluzioni	$(-1, i\sqrt{2}), (-1, -i\sqrt{2})$
4 soluzioni	$(1, i), (1, -i), (2, i\sqrt{2}), (2, -i\sqrt{2})$
2 soluzioni	$(i, 0), (1+i, (-1+i)/\sqrt{2})$
5 soluzioni	$(0, 0), (e^{\pi i/12}, 1), (e^{5\pi i/12}, 1), (e^{13\pi i/12}, 1), (e^{17\pi i/12}, 1),$
4 soluzioni	$(\sqrt{2}, -\sqrt{2}+i), (-\sqrt{2}, \sqrt{2}+i), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}-i), (-\sqrt{2}, \sqrt{2}-i)$
4 soluzioni	$(\sqrt{2}+2i, (-\sqrt{2}-i)/2), (-\sqrt{2}+2i, (\sqrt{2}-i)/2), (\sqrt{2}+2i, (-\sqrt{2}+i)/2), (-\sqrt{2}+2i, (\sqrt{2}+i)/2),$
2 soluzioni	$(0, 1, 1), (2, -1, 1)$