Equazione differenziale

Si consideri l'equazione differenziale

$$\dot{u} = \frac{u}{t + u^2}$$

dove $u = u(t)$. Una sua soluzione è $u(t) \equiv 0$. Cerchiamo adesso le soluzioni non identicamente nulle. Ricavando t si ottiene

$$t = \frac{u}{\dot{u}} - u^2.$$

Adesso, derivando rispetto a t

$$1 = \frac{\dot{u}^2 - u\ddot{u}}{\dot{u}^2} - 2u\dot{u} \Rightarrow \ddot{u}u = -2\dot{u}^3 u \Rightarrow \ddot{u} = -2\dot{u}^3$$

dove l'ultimo passaggio deriva dall'aver supposto $u(t) \not\equiv 0$. Operando la sostituzione $y(t) = \dot{u}$ riduciamo il problema a un'equazione lineare $\dot{y} = -2y^3$, il cui integrale generale è $y(t) = \pm\frac{1}{\sqrt{c_1+4t}}$. Adesso

$$\dot{u}(t) = \pm\frac{1}{\sqrt{c_1 + 4t}} \Rightarrow u(t) = \pm\frac{1}{2}\sqrt{c_1 + 4t} + c_2.$$

Sostituisco e faccio la verifica (per semplicità considero solo la soluzione "positiva"):

$$\frac{1}{\sqrt{c_1 + 4t}} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{c_1 + 4t} + c_2}{t + \frac{c_1+4t}{4} + c_2^2 + c_2\sqrt{c_1 + 4t}} \Rightarrow c_2^2 = c_1$$

(si sono tralasciati i conti, speriamo sian giusti *:D*). Detta $k = c_2$ e recuperando il doppio segno, si ottiene:

$$u(t) = \pm\frac{1}{2}\sqrt{k^2 + 4t} + k, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Breve commento: era plausibile aspettarsi un'unica costante, visto il primo ordine dell'equazione iniziale; la seconda costante è spuntata fuori, probabilmente, dal fatto che ho derivato per ottenere la mia soluzione per poi integrare due volte...