Numeri Complessi

Nell'insieme $\mathbb{R}$ la risoluzione di equazioni di secondo grado con discriminante negativo, non è possibile. Questo perché la funzione reale *radice quadrata* non è definita per numeri negativi, quindi l'insieme $\mathbb{R}$ non è *algebricamente chiuso.*
L'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$ permette di risolvere questo problema, definendo un insieme algebricamente chiuso.
Dalla retta reale (dimensione uno) si passa al piano di Gauss (dimensione due).
*Il piano di Gauss è detto anche piano complesso, costituito da un asse reale(orizzontale) e un asse immaginario(verticale)

Si introduce un nuovo numero "i" chiamato "*Unità immaginaria*", con la seguente proprietà: $i=\sqrt{-1} \Leftrightarrow i^2=-1$
Un numero complesso è *un punto* nel piano di Gauss, rappresentabile in diverse notazioni:

- Cartesiana $z=a+ib$
- Trigonometrica $z=|z|(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$
- Esponenziale $z=|z|\,e^{i\theta}$

Dove
- $a=\Re(z)$ è la parte reale, $b=\Im(z)$ è la parte immaginaria
- $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ è la distanza dal centro
- θ angolo in radianti, formato a partire dal semiasse positivo reale

Da quanto detto $\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}$ perché i numeri reali sono numeri complessi con $\Im(z)=0$ (la parte immaginaria è nulla)
In generale, l'insieme dei numeri complessi è definito con $\mathbb{C}=\{z=x+iy,\ x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}\}$

Coniugato

$z=a+ib \Rightarrow \bar{z}=a-ib \Rightarrow z\cdot\bar{z}=|z|^2$. Il coniugato è il simmetrico rispetto all'asse reale (ha la parte immaginaria opposta)

Formule di passaggio

- Cartesiana-Trigonometrica $|z|=\sqrt{a^2+b^2},\ \cos(\theta)=\dfrac{a}{|z|},\ \sin(\theta)=\dfrac{b}{|z|}$
- Trigonometrica-Cartesiana $a=|z|\cos(\theta),\ b=|z|\sin(\theta)$
- Trigonometrica-Esponenziale $|z|(\cos(\theta)+i\sin(\theta)) = |z|\,e^{i\theta}$ (grazie all'identità di Eulero $e^{i\theta}=(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$)
- Esponenziale-Trigonometrica $|z|e^{i\theta}=|z|(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$

**Somma di numeri complessi*: la forma cartesiana è consigliata; si usano le normali regole di somme tra polinomi
**Prodotto di numeri complessi*: la forma esponenziale è consigliata; si usano le normali regole delle potenze

Radici n-esime

Dato $z=|z|\,e^{i\theta}\neq 0$ le radici n-esime di tale numero è l'insieme

$$\sqrt[n]{z}=\left\{w_k=\sqrt[n]{|z|}\,e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)} : k=0,1,2,\ \ldots\ ,\ n-1\right\}$$

*In $\mathbb{C}$ un numero ha esattamente n radici

Risoluzione equazioni di secondo grado complesse

Sia vogliono trovare le soluzioni di $az^2+bz+c=0$. Vale ancora la formula $z_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{(\Delta)}}{2a}$ dove $\pm\sqrt{(\Delta)}$ rappresenta le due radici quadrate del numero complesso $\Delta=b^2-4ac$. Un'equazione di secondo grado in $\mathbb{C}$ ammette sempre due soluzioni (eventualmente coincidenti, quindi con molteplicità due)

In generale la formula risolutiva è

$$z_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{|\Delta|}\ e^{i\frac{\arg(\Delta)}{2}}}{2a}$$

dove $\arg(\Delta)$ è l'angolo (chiamato anche argomento) del numero complesso $\Delta=b^2-4ac$