BY GIMUSI 16/01/17

$$\lim_{x\to 0} x\cdot tg\left(xa + arctg\left(\frac{b}{x}\right)\right)$$

$b=0$ $\leadsto$ $x\,\mathrm{TAN}(xa+\mathrm{ARCTAN}(b/x)) = x\,\mathrm{TAN}(xa) \to 0$

$b\neq 0$ $x\,\mathrm{TAN}(xa+\mathrm{ARCTAN}(b/x)) = x\,\mathrm{TAN}\left(xa\pm\frac{\pi}{2}-\mathrm{ARCTAN}(x/b)\right)=$

$$= x\,\frac{\mathrm{SIN}\left(\pm\frac{\pi}{2}+xa-\mathrm{ARCTAN}(x/b)\right)}{\mathrm{COS}\left(\pm\frac{\pi}{2}+xa-\mathrm{ARCTAN}(x/b)\right)} = x\,\frac{\pm\mathrm{COS}(xa-\mathrm{ARCTAN}(x/b))}{\mp\mathrm{SIN}(xa-\mathrm{ARCTAN}(x/b))}=$$

$$=\frac{x}{xa-\mathrm{ARCTAN}(x/b)}\;\frac{-(xa-\mathrm{ARCTAN}(x/b))}{\mathrm{SIN}(xa-\mathrm{ARCTAN}(x/b))}\cdot\mathrm{COS}(\dots)=$$

$\to b/(ab-1)$ $\quad ab\neq 1$ $\qquad \to -1 \qquad \to 1$

$$=\frac{b}{ab-\underbrace{\frac{\mathrm{ARCTAN}(x/b)}{x/b}}_{\to 1}}\;\frac{-(xa-\mathrm{ARCTAN}(x/b))}{\mathrm{SIN}(xa-\mathrm{ARCTAN}(x/b))}\cdot\mathrm{COS}(\dots)\to\frac{b}{1-ab}$$

$ab\neq 1$

$ab=1$ $\quad ax=y \leadsto b/x=1/y \qquad y\to 0$

$$x\,\mathrm{TAN}(xa+\mathrm{ARCTAN}(b/x)) = \frac{y}{a}\,\mathrm{TAN}(y+\mathrm{ARCTAN}(1/y))=$$

$$=\frac{y}{a}\,\mathrm{TAN}(\pm\pi/2+y-\mathrm{ARCTAN}\,y) = \frac{y}{a}\,\frac{\pm\mathrm{COS}(y-\mathrm{ARTAN}\,y)}{\mp\mathrm{SIN}(y-\mathrm{ARCTAN}\,y)}=$$

$\to \frac{a}{|a|}\cdot(+\infty) \qquad \to -1 \qquad \to 1$

$$=\frac{y}{a(y-\mathrm{ARCTAN}\,y)}\;\frac{-(y-\mathrm{ARCTAN}\,y)}{\mathrm{SIN}(y-\mathrm{ARCTAN}\,y)}\;\mathrm{COS}(y-\mathrm{ARTAN}\,y)\to -\frac{a}{|a|}\cdot(+\infty)$$

INFATTI: $\dfrac{y}{a(y-\mathrm{ARCTAN}\,y)} = \dfrac{1}{a\underbrace{\left(1-\underbrace{\frac{\mathrm{ARCTAN}\,y}{y}}_{\to 1^-}\right)}_{\to 0^+}} \to \dfrac{a}{|a|}\cdot(+\infty)$

$$\begin{cases} y\to 0^+: & 0<y<\mathrm{TAN}\,y \Rightarrow 0<\mathrm{ARCTAN}\,y<y \\ y\to 0^-: & \mathrm{TAN}\,y<y<0 \Rightarrow y<\mathrm{ARCTAN}\,y<0 \end{cases} \Rightarrow 0<\frac{\mathrm{ARCTAN}\,y}{y}<1$$