6 giugno 2008

4. Si consideri lo spazio di funzioni $X = \{P(x)\cdot e^x + Q(x)\cdot e^{2\cdot x} : P \ e \ Q \ polinomi\}$.

(a) Provare che la derivata $D : f \to f'$ definisce un'applicazione iniettiva $D : X \to X$.

(b) Provare che $D : X \to X$ è anche surgettiva.

Svolgimento di (a) :

Sia $f(x)$ un qualunque elemento di X, allora è $f(x) = P(x)\cdot e^x + Q(x)\cdot e^{2\cdot x}$.

La derivata prima di $f(x)$ è data da $f'(x) = [P(x)+P'(x)]\cdot e^x + [2\cdot Q(x)+Q'(x)]\cdot e^{2\cdot x}$.

Essendo $P(x) \ e \ Q(x)$ polinomi, anche le loro derivate prime sono dei polinomi (con i rispettivi gradi inferiori di 1) e, conseguentemente, anche le somme

$[P(x)+P'(x)]$ e $[2\cdot Q(x)+Q'(x)]$ sono sempre polinomi. Quindi anche $f'(x)$ è un

elemento di X.

E' così definita un'applicazione $D : X \to X$ che manda la funzione $f(x)$ nella sua derivata $f'(x)$.

Dalla definizione di derivata di $f(x)$ come limite del suo rapporto incrementale, essendo il limite unico se

esiste, discende anche l'unicità di $f'(x)$. Pertanto, elementi diversi di X avranno immagini diverse in

X, assicurando così l'iniettività dell'applicazione $D : f \to f'$.

Svolgimento di (b) :

Sia $f'(x) = P(x)\cdot e^x + Q(x)\cdot e^{2\cdot x}$ un elemento di X, allora è

$$\int f'(x)dx = \int P(x)\cdot e^x dx + \int Q(x)\cdot e^{2\cdot x} dx$$

Integrando per parti i due integrali a destra, otteniamo che

$$\int P(x)\cdot e^x dx = e^x \cdot \sum_{k=0}^{n_P} (-1)^k \cdot P^{(k)}(x) \quad e \quad \int Q(x)\cdot e^{2\cdot x} dx = e^{2\cdot x} \cdot \sum_{k=0}^{n_Q} (-1)^k \cdot \frac{Q^{(k)}(x)}{2^{k+1}}$$

dove è

n_P = grado massimo di $P(x)$ $\qquad$ $P^{(k)}(x)$ = derivata kappesima di $P(x)$

n_Q = grado massimo di $Q(x)$ $\qquad$ $Q^{(k)}(x)$ = derivata kappesima di $Q(x)$

Questo perché, applicando la formula di integrazione per parti, compaiono le derivate successive dei polinomi $P(x)$ e $Q(x)$, cioè polinomi di grado sempre più basso fino a raggiungere il grado 0.

Quindi, anche $\int f'(x)dx$ è un elemento dell'insieme X.

E' definita così un'applicazione $D^{-1} : X \to X$ che manda l'integrale di $f'(x)$ in una sua primitiva $f(x)$

Ora, essendo l'operazione di integrazione l'operazione inversa di quella di derivazione, è D^{-1} l'applicazione inversa di D , la quale risulta essere invertibile e deve pertanto essere, oltre che iniettiva, anche surgettiva.