6 giugno 2008

4. Si consideri lo spazio di funzioni $X=\{P(x)\cdot e^{x}+Q(x)\cdot e^{2\cdot x} : P\ e\ Q\ \ polinomi\}$.

(a) Provare che la derivata $D : f\to f'$ definisce un'applicazione iniettiva $D : X\to X$.

(b) Provare che $D : X\to X$ è anche surgettiva.

Svolgimento di (a) :

Sia $f(x)$ un qualunque elemento di X , allora è $f(x)=P(x)\cdot e^{x}+Q(x)\cdot e^{2\cdot x}$.

La derivata prima di $f(x)$ è data da $f'(x)=[P(x)+P'(x)]\cdot e^{x}+[2\cdot Q(x)+Q'(x)]\cdot e^{2\cdot x}$.

Essendo $P(x)\ e\ Q(x)$ polinomi, anche le loro derivate prime sono dei polinomi (con i rispettivi gradi inferiori di 1) e, conseguentemente, anche le somme

$[P(x)+P'(x)]$ e $[2\cdot Q(x)+Q'(x)]$ sono sempre polinomi. Quindi anche $f'(x)$ è un elemento di X.

E' così definita un'applicazione $D : X\to X$ che manda la funzione $f(x)$ nella sua derivata $f'(x)$.

Dalla definizione di derivata di $f(x)$ come limite del suo rapporto incrementale, essendo il limite unico se esiste, discende anche l'unicità di $f'(x)$. Pertanto, elementi diversi di X avranno immagini diverse in X , assicurando così l'iniettività dell'applicazione $D : f\to f'$.