Geometria nello spazio 1

Argomenti: Geometria nello spazio **Difficoltà**: $\star\star\star\star$

Prerequisiti: Uso dei vettori nello spazio, norma, distanza e prodotto scalare in $\mathbb{R}^3$

---

1. Determinare il simmetrico del punto generico (x, y, z) rispetto ad un punto (x_0, y_0, z_0).
2. Determinare la proiezione di un punto (x_0, y_0, z_0) sul piano $ax + by + cz + d = 0$.

   Dedurne la formula per la distanza di un punto da un piano.
3. Determinare il simmetrico del punto generico (x, y, z) rispetto al piano $ax+by+cz+d = 0$.
4. Determinare la distanza del punto generico (x, y, z) dalla retta di equazione parametrica $(x_0, y_0, z_0) + t(x_1, y_1, z_1)$.
5. Determinare l'equazione del luogo dei punti la cui distanza da una retta assegnata di equazione parametrica $(x_0, y_0, z_0) + t(x_1, y_1, z_1)$ è uguale ad un numero reale positivo R assegnato. Di cosa si tratta geometricamente?
6. Consideriamo il triangolo con vertici nei punti $(1, 1, 2)$, $(2, 3, -1)$, $(1, 0, 1)$.
   (a) Determinare le coordinate dei punti medi dei lati e del baricentro.
   (b) Determinare l'area del triangolo.
   (c) Determinare le coordinate dei piedi delle altezze e dell'ortocento (punto di intersezione delle altezze).
   (d) Determinare il luogo dei punti dello spazio che sono equidistanti dai 3 vertici.
   (e) Determinare le coordinate del circocentro (il centro della circonferenza circoscritta).
7. I tre punti $(1, 1, 2)$, $(2, 3, -1)$, $(1, 0, 1)$ sono tre vertici di un parallelogrammo. Determinare in quanti e quali punti può essere il quarto vertice.
8. In un parallelogrammo $ABCD$ (si intende che il lato AB ed il lato CD sono paralleli, così come pure il lato BC ed il lato AD) si ha che $A = (1, 1, 2)$, $B = (2, 3, -1)$, $C = (1, 0, 1)$.
   (a) Determinare le coordinate di D e del punto di intersezione delle diagonali.
   (b) Determinare gli angoli del parallelogrammo.
   (c) Determinare l'area del parallelogrammo.
9. Determinare l'equazione del cono (o meglio dei 2 coni) che hanno come vertice il punto (x_0, y_0, z_0), come asse la retta di equazione parametrica $(x_0, y_0, z_0) + t(x_1, y_1, z_1)$, e come apertura (l'angolo tra l'asse e le generatrici) un angolo θ assegnato. Discutere i casi limite in cui θ tende a $0°$ o a $90°$.
10. Un cono ha il vertice in $(1, 2, 3)$, passa per l'origine, ed il suo asse è perpendicolare al piano di equazione $x - y + 2z = 5$.

    Determinare l'equazione del cono e la sua apertura.

1. Determinare il simmetrico del punto generico (x, y, z) rispetto ad un punto (x_0, y_0, z_0).

$$\Rightarrow P' = (2x_0 - x, 2y_0 - y, 2z_0 - z)$$

2. Determinare la proiezione di un punto (x_0, y_0, z_0) sul piano $ax + by + cz + d = 0$. Dedurne la formula per la distanza di un punto da un piano.

$$\Rightarrow \quad x' = \frac{(b^2+c^2)x_0 - ab\,y_0 - ac\,z_0 - ad}{(a^2+b^2+c^2)}$$

$$y' = \frac{-ab\,x_0 + (a^2+c^2)y_0 - bc\,z_0 - bd}{(a^2+b^2+c^2)}$$

$$z' = \frac{-ac\,x_0 - bc\,y_0 + (a^2+b^2)z_0 - cd}{(a^2+b^2+c^2)}$$

$$\Rightarrow d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

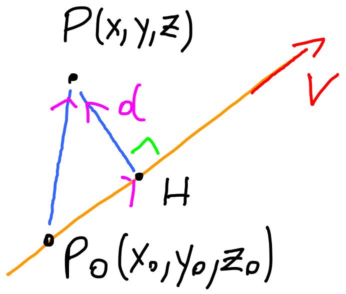
3. Determinare il simmetrico del punto generico (x, y, z) rispetto al piano $ax+by+cz+d = 0$.

$$x' = \frac{(-a^2+b^2+c^2)x - 2ab\,y - 2ac\,z - 2ad}{a^2+b^2+c^2}$$

$$y' = \frac{-2ab\,x + (a^2-b^2+c^2)y - 2bc\,z - 2bd}{a^2+b^2+c^2}$$

$$z' = \frac{-2ac\,x - 2bc\,y + (a^2+b^2-c^2)z - 2cd}{a^2+b^2+c^2}$$

4. Determinare la distanza del punto generico (x, y, z) dalla retta di equazione parametrica $(x_0, y_0, z_0) + t(x_1, y_1, z_1)$.



COMP. ⊥ V

COMP. // V

$$(P-H) = (P-P_0) - \frac{\langle (P-P_0), V\rangle}{\|V\|^2} V$$

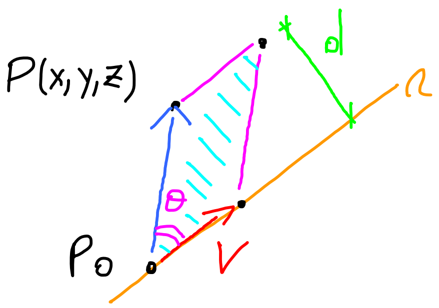
$$(P-H) = (x-x_0, y-y_0, z-z_0) - \left[\frac{(x-x_0)x_1 + (y-y_0)y_1 + (z-z_0)z_1}{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\right](x_1, y_1, z_1)$$

$$\Rightarrow d^2 = \|P-H\|^2 = \|P-P_0\|^2 + \frac{\langle (P-P_0), V\rangle^2}{\|V\|^2} - 2\frac{\langle (P-P_0), V\rangle^2}{\|V\|^2} =$$

$$= \|P-P_0\|^2 - \frac{\langle (P-P_0), V\rangle^2}{\|V\|^2}$$

5. Determinare l'equazione del luogo dei punti la cui distanza da una retta assegnata di equazione parametrica $(x_0, y_0, z_0) + t(x_1, y_1, z_1)$ è uguale ad un numero reale positivo R assegnato. Di cosa si tratta geometricamente?

$$d^2 = \|P-P_0\|^2 - \frac{\langle (P-P_0), V\rangle^2}{\|V\|^2} = R^2 \Rightarrow \|P-P_0\|^2 \cdot \|V\|^2 - \langle (P-P_0), V\rangle^2 = R^2 \|V\|^2$$



INTERPRETAZIONE GEOMETRICA

$$\|P-P_0\|^2 \|V\|^2 - \langle P-P_0, V\rangle^2 =$$

$$= \|P-P_0\|^2 \|V\|^2 \left(1 - \overbrace{\frac{\langle P-P_0, V\rangle^2}{\|P-P_0\|^2 \|V\|^2}}^{\equiv \cos^2\theta}\right) =$$

$$= \left(\|P-P_0\| \cdot \|V\| \cdot \text{SEN}\theta\right)^2 = \left(\begin{matrix}\text{AREA DEL}\\ \text{PARALLEL.}\end{matrix}\right)^2 =$$

= COSTANTE SE d É COSTANTE

6. Consideriamo il triangolo con vertici nei punti $(1, 1, 2)$, $(2, 3, -1)$, $(1, 0, 1)$.

(a) Determinare le coordinate dei punti medi dei lati e del baricentro.

(b) Determinare l'area del triangolo.

(c) Determinare le coordinate dei piedi delle altezze e dell'ortocento (punto di intersezione delle altezze).

(d) Determinare il luogo dei punti dello spazio che sono equidistanti dai 3 vertici.

(e) Determinare le coordinate del circocentro (il centro della circonferenza circoscritta).

$A(1,1,2)$ $B(2,3,-1)$ $C(1,0,1)$

(a) $M_{AB} = \left(\frac{3}{2}, 2, \frac{1}{2}\right)$ $M_{BC} = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$ $M_{AC} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ $G = (5/3, 5/3, 2/3)$

(b) AREA $= \frac{3}{2}\sqrt{3}$

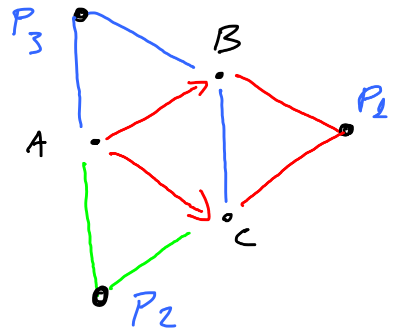
(c) $H_{AB} = \left(\frac{15}{15}, \frac{16}{15}, \frac{25}{15}\right)$ $H_{AC} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ $H_{BC} = \left(\frac{13}{15}, \frac{3}{15}, \frac{12}{15}\right)$

$O = \left(\frac{28}{27}, \frac{16}{27}, \frac{38}{27}\right)$

(d) $r: (0,2,0) + \delta(5,-1,1)$

(e) $C = \left(\frac{50}{27}, \frac{56}{27}, \frac{8}{27}\right)$

7. I tre punti $\overset{A}{(1,1,2)}$, $\overset{B}{(2,3,-1)}$, $\overset{C}{(1,0,1)}$ sono tre vertici di un parallelogrammo. Determinare in quanti e quali punti può essere il quarto vertice.



$$P_1 = C + (B-A) = (2,2,-2)$$

$$P_2 = A + (C-B) = (0,-2,5)$$

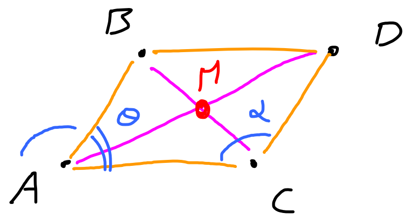
$$P_3 = B + (A-C) = (2,5,0)$$

8. In un parallelogrammo $ABCD$ (si intende che il lato AB ed il lato CD sono paralleli, così come pure il lato BC ed il lato AD) si ha che $A = (1,1,2)$, $B = (2,3,-1)$, $C = (1,0,1)$.

   (a) Determinare le coordinate di D e del punto di intersezione delle diagonali.

   (b) Determinare gli angoli del parallelogrammo.

   (c) Determinare l'area del parallelogrammo.



(a) $D = C + (B-A) = (2,2,-2)$

$$M = A + \frac{1}{2}(D-A) = \frac{1}{2}(A+D) = \frac{1}{2}(B+C)$$

$$= \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$$

(b) $B-A = (1,2,-3)$ $\quad AB = \sqrt{15}$

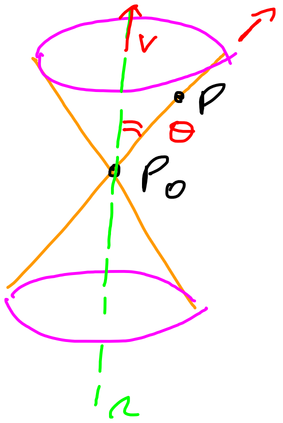
$C-A = (0,-1,-1)$ $\quad AC = \sqrt{2}$

$$\cos\theta = \frac{0-2+3}{\sqrt{28}} = \frac{1}{\sqrt{28}}$$

$\theta = \arccos(1/\sqrt{28})$ $\qquad \alpha = \pi - \theta$

(c) $\text{AREA} = AC \cdot AB \sin\theta = \sqrt{15} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - 1/28} = 3\sqrt{3}$

9. Determinare l'equazione del cono (o meglio dei 2 coni) che hanno come vertice il punto (x_0, y_0, z_0), come asse la retta di equazione parametrica $(x_0, y_0, z_0) + t(x_1, y_1, z_1)$, e come apertura (l'angolo tra l'asse e le generatrici) un angolo θ assegnato. Discutere i casi limite in cui θ tende a 0° o a 90°.



$$\frac{\langle P-P_0, V\rangle}{\|P-P_0\|\cdot\|V\|} = \cos\theta$$

$$\Rightarrow \langle P-P_0, V\rangle^2 = \cos^2\theta\,\|P-P_0\|^2\cdot\|V\|^2$$

$$[(x-x_0)x_1+(y-y_0)y_1+(z-z_0)z_1]^2 = \cos^2\theta\,[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]\cdot(x_1^2+y_1^2+z_1^2)$$

$\theta \to 90°$, $\cos\theta \to 0 \Rightarrow (x-x_0)x_1+(y-y_0)y_1+(z-z_0)z_1 = 0 \equiv$ PIANO PER $P_0 \perp V$

$\theta \to 0°$, $\cos\theta \to 1 \Rightarrow \langle P-P_0, V\rangle = \|P-P_0\|\cdot\|V\|$

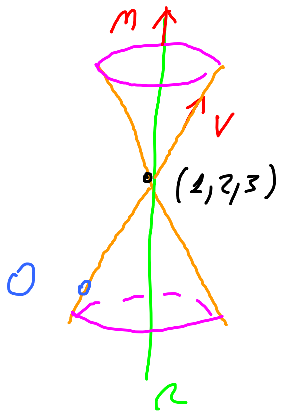
$$2(x-x_0)(y-y_0)x_1y_1+2(x-x_0)(z-z_0)x_1z_1+2(y-y_0)(z-z_0)y_1z_1 =$$
$$= (x-x_0)^2(y_1^2+z_1^2)+(y-y_0)^2(x_1^2+z_1^2)+(z-z_0)^2(x_1^2+y_1^2)$$

$$|V| = \underbrace{[(x-x_0)y_1-(y-y_0)x_1]^2}_{(e_3)}+\underbrace{[(x-x_0)z_1-(z-z_0)x_1]^2}_{(e_2)}+\underbrace{[-(y-y_0)z_1+(z-z_0)y_1]^2}_{(e_1)} = 0$$

$$V = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ (x-x_0) & (y-y_0) & (z-z_0) \end{vmatrix} \Rightarrow (x_1, y_1, z_1) \parallel (x-x_0, y-y_0, z-z_0)$$

10. Un cono ha il vertice in $(1, 2, 3)$, passa per l'origine, ed il suo asse è perpendicolare al piano di equazione $x - y + 2z = 5$.

Determinare l'equazione del cono e la sua apertura.



$$\cos\theta = \frac{5}{2\sqrt{21}}$$

$$\Rightarrow 11x^2+11y^2-31z^2+28xy-56xz+56yz+50x-250y+130z = 0$$