BY GIMUSI 01/12/16

Dimostra le due disuguaglianze tramite il calcolo differenziale o altro.
$\forall x > 0$ vale la disuguaglianza $\frac{x}{x+2} < \ln(x+1) < x$

e
$\forall x > 0$ vale la disuguaglianza $\frac{x}{x+1} < \frac{2x}{x+2} < \ln(x+1)$

La seconda si ottiene dalla prima derivando.

1) $\forall x > 0 \qquad \frac{x}{x+2} < \ln(x+1) < x$

(i) $\ln(x+1) < x \iff x - \ln(x+1) > 0$

$$f(x) = x - \ln(x+1) \qquad f(0) = 0$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1} \geq 0 \qquad f'(x) = 0 \iff x = 0$$

$\Rightarrow$ (MONOTONIA 3) f È STRETT. CRESCENTE $\forall x \geq 0$

$\Rightarrow f(x) > 0 \ \forall x > 0 \Rightarrow \ln(x+1) < x$

(ii) $\frac{x}{x+2} < \ln(x+1) \iff \ln(x+1) - \frac{x}{x+2} > 0$

$$f(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+2} \qquad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{\cancel{x}+2-\cancel{x}}{(x+2)^2} = \frac{(x+2)^2 - 2(x+1)}{(x+1)(x+2)^2} = \frac{x^2+4x+4-2x-2}{(x+1)(x+2)^2} =$$

$$= \frac{x^2+2x+2}{(x+1)(x+2)^2} = \frac{(x+1)^2+1}{(x+1)(x+2)^2} > 0 \qquad \forall x \geq 0$$

$\Rightarrow$ (MONOTONIA 2) f È STRETT. CRESCENTE $\forall x \geq 0$

$\Rightarrow f(x) > 0 \ \forall x > 0 \Rightarrow \frac{x}{x+2} < \ln(x+1)$

(i) + (ii) $\Rightarrow \forall x > 0 \qquad \frac{x}{x+2} < \ln(x+1) < x$

2) ANALOGO A 1)