Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Prova in Itinere di Analisi Matematica 1

Pisa, 24 Novembre 2016

(Problemi da 3 punti)

1. Consideriamo la funzione $f(x) = 2^{|x-1|}$, pensata come $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   Calcolare l'immagine e la controimmagine di $[0, 2)$.

2. Calcolare il limite della successione $\sqrt[n]{\cosh(3n)}$.

3. Determinare lo sviluppo di Taylor di ordine 10, con centro nell'origine, della funzione
$$f(x) = \arctan\left(\log(1 - x^3)\right).$$

4. Consideriamo la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + (-1)^n n^3}{n^a},$$
   dove a è un parametro reale positivo.
   Determinare per quali valori del parametro si ha convergenza e per quali valori si ha assoluta convergenza.

(Problemi da 8 punti)

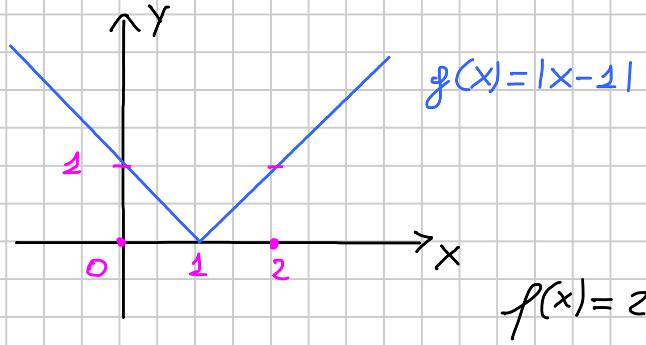
5. Determinare ordine di infinitesimo e parte principale della successione
$$\sqrt[n]{n+3} - \sqrt[n]{n}.$$

6. Consideriamo, al variare del parametro reale λ, la funzione $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da
$$f_\lambda(x) = x - \arctan(\lambda x).$$
   Determinare per quali valori del parametro la funzione risulta iniettiva e/o surgettiva.

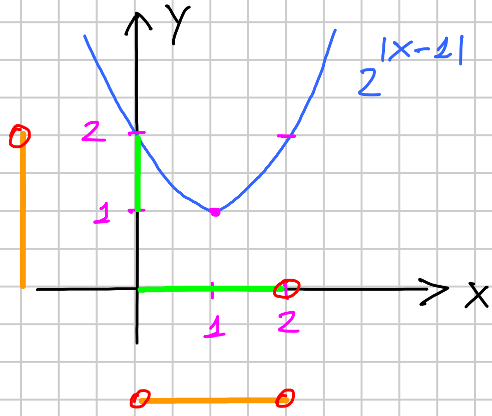
7. Consideriamo l'equazione
$$x^5 - x\log(1 + x^2) + \sin(x^4) = n.$$
   (a) Dimostrare che per $n = 0$ l'equazione ammette almeno tre soluzioni.
   (b) Dimostrare che esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che l'equazione ammette una soluzione unica x_n per ogni $n \geq n_0$.
   (c) (Bonus question) Studiare, al variare del parametro reale positivo a, la convergenza della serie
$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (x_n - n^a)^2.$$

1. Consideriamo la funzione $f(x) = 2^{|x-1|}$, pensata come $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Calcolare l'immagine e la controimmagine di $[0, 2)$.



$$f(x) = 2^{g(x)}$$



$$\rightsquigarrow \quad f([0,2)) = [1,2] \qquad f^{-1}([0,2)) = (0,2)$$

2. Calcolare il limite della successione $\sqrt[n]{\cosh(3n)}$.

$$\sqrt[n]{\cosh(3n)} = \sqrt[n]{\frac{e^{3n} - e^{-3n}}{2}} = e^{3} \sqrt[n]{\frac{1 - e^{-6n}}{2}} \to e^{3}$$

3. Determinare lo sviluppo di Taylor di ordine 10, con centro nell'origine, della funzione

$$f(x) = \arctan\left(\log(1 - x^3)\right).$$

$$y = \log(1 - x^3) = -x^3 - \frac{x^6}{2} - \frac{x^9}{3} + o(x^{11}) \to 0$$

$$\arctan(\log(1 - x^3)) = \arctan(y) = y - \frac{y^3}{3} + o(y^4) =$$

$$= -x^3 - \frac{x^6}{2} - \frac{x^9}{3} - \frac{1}{3}\left(-x^3 - \frac{x^6}{2} - \frac{x^9}{3}\right)^3 + o(x^{10}) =$$

$$= -x^3 - \frac{x^6}{2} - \cancel{\frac{x^9}{3}} - \cancel{\frac{1}{3}(-x^9)} + o(x^{10}) = -x^3 - \frac{x^6}{2} + o(x^{10})$$

4. Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + (-1)^n n^3}{n^a},$$

dove a è un parametro reale positivo.

Determinare per quali valori del parametro si ha convergenza e per quali valori si ha assoluta convergenza.

(i) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+(-1)^n n^3}{n^a} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{n^a}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^a} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a-2}}$$ CONVERGE PER $a > 3$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{n^a} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{a-3}}$$ CONVERGE PER $a > 3$

$$\rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+(-1)^n n^3}{n^a}$$ CONVERGE PER $a > 3$

(ii) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{n^2+(-1)^n n^3}{n^a} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^a} \left| 1+(-1)^n n \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left| 1+(-1)^{2k} 2k \right|}{(2k)^{a-2}} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left| 1+(-1)^{2k+1} \cdot (2k+1) \right|}{(2k+1)^{a-2}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{(2k)^{a-2}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k}{(2k+1)^{a-2}}$$

$$\rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{n^2+(-1)^n n^3}{n^a} \right|$$ CONVERGE PER $a > 4$

5. Determinare ordine di infinitesimo e parte principale della successione

$$\sqrt[n]{n+3} - \sqrt[n]{n}.$$

$$\sqrt[n]{n+3} = e^{\frac{1}{n}\log(n+3)} = e^{\frac{1}{n}\left(\log n + \log(1+3/n)\right)} =$$

$$= e^{\frac{1}{n}\left(\log n + 3/n + o(1/n)\right)} = e^{\frac{\log n}{n} + \frac{3}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} =$$

$$= 1 + \frac{\log n}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\log n}{n} + \frac{3}{n^2}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= 1 + \frac{\log n}{n} + \frac{1}{2}\frac{\log^2 n}{n^2} + \frac{3}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\sqrt[n]{n} = e^{\frac{\log(n)}{n}} = 1 + \frac{\log n}{n} + \frac{1}{2}\frac{\log^2 n}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\rightsquigarrow \quad \sqrt[n]{n+3} - \sqrt[n]{n} = \frac{3}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

É UN INFINITESIMO DI ORDINE 2 CON PARTE PRINCIPALE $3/n^2$

6. Consideriamo, al variare del parametro reale λ, la funzione $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_\lambda(x) = x - \arctan(\lambda x).$$

Determinare per quali valori del parametro la funzione risulta iniettiva e/o surgettiva.

(i) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \arctan(\lambda x) \leq \frac{\pi}{2}$

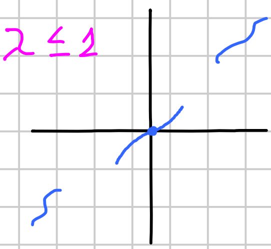
$\Rightarrow \lim_{x \to \pm\infty} f_\lambda(x) = \pm\infty$, $f_\lambda(x)$ CONTINUA

$\Rightarrow$ $f_\lambda(x)$ È SURIETTIVA $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

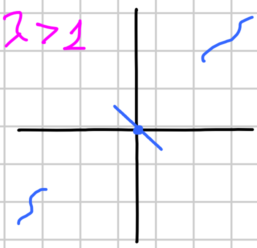
(ii) $x \to 0 \quad f_\lambda(x) = x - \lambda x + \frac{\lambda^3 x^3}{3} + o(x^3) =$

$= (1-\lambda)x + \frac{\lambda^3}{3} x^3 + o(x^3)$

$\lambda \leq 1$



$\lambda > 1$



$\underline{\lambda > 1}$ $\quad \exists\, \delta > 0$ t.c. $f(\delta) > 0$

$\Rightarrow$ PER IL TEOREMA DEGLI ZERI

$\exists\, x_0 > 0$ t.c. $f(x_0) = f(0) = 0$

$\Rightarrow$ $f_\lambda(x)$ È NON INIETTIVA $\forall \lambda > 1$

$\underline{\lambda \leq 1}$ $\quad f_\lambda'(x) = 1 - \frac{\lambda}{1+\lambda^2 x^2} = \frac{\lambda^2 x^2 - \lambda + 1}{1 + \lambda^2 x^2} > 0$

$$\begin{cases} \lambda^2 x^2 - \lambda + 1 \rightsquigarrow \Delta = \lambda^2 - 4\lambda^2 = -3\lambda^2 < 0 \\ 1 + \lambda^2 x^2 > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $f_\lambda(x)$ È STRETT. CRESC. $\Rightarrow$ INIETTIVA $\forall \lambda \leq 1$

7. Consideriamo l'equazione

$$x^5 - x\log(1+x^2) + \sin(x^4) = n.$$

(a) Dimostrare che per $n = 0$ l'equazione ammette almeno tre soluzioni.

(b) Dimostrare che esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che l'equazione ammette una soluzione unica x_n per ogni $n \geq n_0$.

(c) (Bonus question) Studiare, al variare del parametro reale positivo a, la convergenza della serie

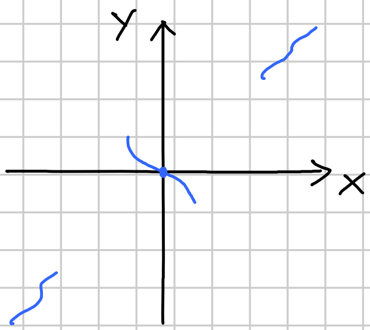
$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (x_n - n^a)^2 .$$

(a) SIA $f(x) = x^5 - x\log(1+x^2) + \sin(x^4)$ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ CONTINUA

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = x^5\left(1 - \frac{\log(1+x^2)}{x^4} + \frac{\sin(x^4)}{x^5}\right) = \pm\infty$$

$\Rightarrow f$ SURIETTIVA

$x \to 0$ $\quad f(x) = x^5 - x\left(x^2 + o(x^2)\right) + x^4 = -x^3 + o(x^3)$



$\exists\, \delta > 0$ t.c. $f(\delta) < 0 \wedge f(\delta) > 0$

$\Rightarrow$ PER IL TEOREMA DEGLI ZERI

$$\begin{cases} \exists\, a > 0 \text{ t.c. } f(x_0) = f(0) = 0 \\ \exists\, b < 0 \text{ t.c. } f(b) = f(0) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f(x) = 0$ AMMETTE ALMENO TRE SOLUZIONI $(x = 0, a, b)$

(b) $f'(x) = 5x^4 - \log(1+x^2) - x\,\dfrac{2x}{1+x^2} + 4x^3\cos(x^4)$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} x^4\left(5 - \frac{\log(1+x^2)}{x^4} - \frac{2}{x^2+x^4} + \frac{4\cos(x^4)}{x}\right) = +\infty$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \exists\, \alpha > 0 \quad \text{t.c.} \quad f'(x) > 0 \quad \forall x \geq \alpha \\ \exists\, \beta < 0 \quad \text{t.c.} \quad f'(x) > 0 \quad \forall x \leq \beta \end{cases}$$

$\Rightarrow$ f È STRETT. CRESCENTE IN $(-\infty, \beta] \cup [\alpha, +\infty)$

PER WEIERSTRASS ESISTE MAX f IN $[\beta, \alpha]$

SIA $M = \max\{ f(x) \mid x \in [\beta, \alpha] \}$

SIA $n_0 = \lfloor M \rfloor + 1 \Rightarrow \forall n \geq n_0$ $f(x) = n$ AMMETTE UN'UNICA SOLUZIONE $x_n \geq \alpha$

(c) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow n \to +\infty \quad x_n \to +\infty$

$$n^a = \left(x_n^5 - x_n \log(1 + x_n^2) + \sin(x_n^4)\right)^a =$$

$$= x_n^{5a}\left(1 - \frac{1}{x_n^4}\left(\log x_n^2 + \log\left(1 + \frac{1}{x_n^2}\right)\right) + \frac{\sin x_n^4}{x_n^5}\right)^a =$$

$$= x_n^{5a}\left(1 - \frac{1}{x_n^4}\left(2\log x_n + \frac{1}{x_n^2} + o\left(\frac{1}{x_n^2}\right)\right) + \frac{\sin x_n^4}{x_n^5}\right)^a =$$

$$= x_n^{5a}\left(1 - \frac{2\log x_n}{x_n^4} + \frac{\sin x_n^4}{x_n^5} + \frac{1}{x_n^6} + o\left(\frac{1}{x_n^6}\right)\right)^a =$$

$$\frac{\sin x_n^4}{x_n^5} = \frac{\log x_n}{x_n^4} \cdot \frac{\sin x_n^4}{x_n \log x_n} \to 0 \qquad \frac{\log x_n}{x_n^4} \to 0$$

$$= x_n^{5a}\left(1 - \frac{2\log x_n}{x_n^4} + o\left(\frac{\log x_n}{x_n^4}\right)\right)^a =$$

$$= x_n^{5a}\left(1 - \frac{2a\log x_n}{x_n^4} + o\left(\frac{\log x_n}{x_n^4}\right)\right) =$$

$$= x_n^{5a} - \frac{2a \log x_n}{x_n^{1-5a}} + o\left(\frac{\log x_n}{x_n^{1-5a}}\right)$$

$$x_n - n^a = x_n - x_n^{5a} + \frac{2a \log x_n}{x_n^{1-5a}} + o\left(\frac{\log x_n}{x_n^{1-5a}}\right) \qquad n \to +\infty$$

SIA $y_n = x_n - x_n^{5a} + \dfrac{2a \log x_n}{x_n^{1-5a}}$

$$\Rightarrow \quad \frac{(x_n - n^a)^2}{y_n^2} \to 1 \qquad (x_n - n^a)^2 \geq 0 \qquad y_n^2 > 0$$

PER CONFRONTO ASINTOTICO $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} (x_n - n^a)^2$ E $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} y_n^2$

HANNO LO STESSO COMPORTAMENTO

$\underline{a = 1/5}$
$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} y_n^2 = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \left(\frac{2a \log x_n}{x_n^3}\right)^2 = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{4a \log^2 x_n}{x_n^6}$$

CONVERGE PER C.A. CON $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{1}{x_n^2}$

$\underline{a \neq 1/5}$
$$\lim_{n \to +\infty} y_n^2 = \lim_{n \to +\infty} \left(x_n - x_n^{5a} + \frac{2a \log x_n}{x_n^{1-5a}}\right)^2 = +\infty$$

$$\begin{cases} a < \frac{1}{5} & \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(x_n - x_n^{5a}\right) = +\infty \\ \frac{1}{5} < a < \frac{1}{5} & \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(x_n - x_n^{5a}\right) = -\infty \\ a > \frac{1}{5} & \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(x_n - x_n^{5a} + \frac{2a \log x_n}{x_n^{1-5a}}\right)^2 = \end{cases} \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{2a \log x_n}{x_n^{1-5a}} = 0$$

$$= \lim_{n \to +\infty} x_n^{10a} \left(x_n^{1-5a} - 1 + \frac{2a \log x_n}{x_n^5}\right)^2 = +\infty$$

$$\leadsto \sum_{n=n_0}^{+\infty} (x_n - n^a)^2 \begin{cases} < +\infty & \text{PER } a = 1/5 \\ = +\infty & \text{PER } a \neq 1/5 \end{cases}$$