BY GIMUSI 03/11/16

Induzione 2

Argomenti: principio di induzione **Difficoltà:** ⋆⋆⋆

Prerequisiti: principio di induzione

---

1. (Disuguaglianza di Bernoulli) Dimostrare che per ogni $x > -1$ si ha che
$$(1+x)^n \geq 1 + nx \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$
Dove interviene l'ipotesi $x > -1$ nella dimostrazione? Che ne è dell'enunciato nel caso $x \leq -1$?

2. Provare a dimostrare che per ogni $x \geq 0$ si ha che
$$(1+x)^n \geq \frac{n(n+1)}{2} x^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$
e vedere che succede. Provare invece a dimostrare che
$$(1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$
Generalizzare questo tipo di disuguaglianze (avendo in mente il Binomio di Newton).

3. (Stime per radici n-esime)
   (a) Dimostrare che per ogni intero $n \geq 1$ vale la stima
   $$\sqrt[n]{2} \leq 1 + \frac{1}{n}.$$
   Determinare una stima analoga per $\sqrt[n]{a}$ in funzione del parametro $a > 1$.
   (b) Dimostrare che per ogni intero $n \geq 1$ vale la stima
   $$\sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}.$$

4. Dimostrare che per ogni coppia di numeri naturali $k \leq n$ vale la disuguaglianza
$$? \quad \binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{2^k}.$$

5. Dimostrare che per ogni intero $n \geq 1$ si ha che
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{1}{2} \lfloor \log_2 n \rfloor,$$
dove $\lfloor \alpha \rfloor$ indica la parte intera del numero reale α, cioè il più piccolo intero $m \leq \alpha$.

6. Dimostrare che
$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2 \qquad \forall n \geq 1.$$

1/9

1. (Disuguaglianza di Bernoulli) Dimostrare che per ogni $x > -1$ si ha che

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dove interviene l'ipotesi $x > -1$ nella dimostrazione? Che ne è dell'enunciato nel caso $x \leq -1$?

(i) $\forall x > -1 \quad (1+x)^n \geq (1+nx) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

PASSO BASE: $n=0 \qquad (1+x)^0 = 1 \geq (1+0\cdot x) = 1$ OK

PASSO INDUTTIVO:

$$(1+x)^n \geq (1+nx) \implies (1+x)^{n+1} \geq (1+(n+1)x)$$

VALE SE $1+x \geq 0$ $\quad x \neq -1$ $(n=0)$

DIM: $(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) =$

$= 1 + (n+1)x + nx^2 \geq (1+(n+1)x) \quad \square$

(ii) PER $x=-1 \quad (1+x)^n = 0 \geq (\underbrace{1+nx}_{\leq 0}) \quad \forall n \geq 1$

(iii) PER $x < -1$

$\underline{n=0} \qquad (1+x)^n = 0 \leq 1+nx = 1$

$\underline{n \neq 0 \text{ PARI}} \quad (1+x)^n > 0 > \underbrace{1+nx}_{<0} \quad \forall n \geq 2$ PARI

$\underline{n \text{ DISPARI}}$

$-2 \leq x < -1 \qquad (1+x)^n \not\geq 1+nx$

$y = x+2 \quad 0 \leq y < 1 \quad (1-y)^n \geq 1 + n(y-2)$

PASSO BASE $n=1 \quad 1-y \geq 1+y-2 = y-1 \quad 2(1-y) \geq 0$ OK

PASSO IND. $(1-y)^n \geq 1 + n(y-2)$

$\implies (1-y)^{n+2} \geq 1 + (n+2)(y-2)$

$$(1-y)^{n+2} = (1-y)^2(1-y)^n \geq (1-y)^2(1+n(y-2)) =$$

$= 1 + n(y-2) - 2y - 2ny(y-2) + y^2 + ny^2(y-2) =$

$= 1 + (n+2)(y-2) - 2(y-2) - 2y - 2ny(y-2) + y^2 + ny^2(y-2) \geq$

$\overset{?}{\geq} (1 + (n+2)(y-2))$

$-2(y-2) - 2y - 2ny(y-2) + y^2 + ny^2(y-2) \geq 0$

$-2y + 4 - 2y - 2ny^2 + 4ny + y^2 + ny^3 - 2ny^2 \geq 0$

$$5-5y+5ny+y^2-5ny^2+ny^3 \geq 0$$

$$n(5y-5y^2+y^3)+5-5y+y^2=$$

$$=(ny+1)(5-5y+y^2)=\overset{>0}{(ny+1)}\overset{>0}{(y-2)^2} \geq 0 \quad \text{OK}$$

$x<-2 \quad (1+x)^n \leq 1+nx$

$y=-x \quad y>2 \qquad (1-y)^n \leq 1-ny$

PASSO BASE $\quad n=1 \qquad 1-y \leq 1-y$

PASSO IND. $\quad (1-y)^n \leq 1-ny$

$$\Rightarrow (1-y)^{n+2} \leq 1-(n+2)y$$

$$(1-y)^{n+2}=(1-y)^2(1-y)^n \leq (1-y)^2(1-ny)=$$

$$=1-ny-2y+2ny^2+y^2-ny^3=1-(n+2)y+2ny^2+y^2-ny^3 \leq$$

$$\leq 1+(n+2)y$$

$$2ny^2+y^2-ny^3 \leq 0 \qquad \overset{>0}{y^2}(2n+1-ny) \leq 0$$

$$2n+1-ny \leq 0 \qquad n(y-2) \geq 1$$

$$\forall y \ \exists n_0 \geq \frac{1}{y-2} \quad \text{t.c.} \ (1-y)^{n+2} \leq 1-(n+2)y$$

$\rightsquigarrow$ PER $\frac{1}{y-2} \leq 1 \quad y \geq 3$ L'INDUZIONE È OK

QUINDI $\quad (1+x)^n \leq 1+nx \quad \forall x \leq -3$

$\rightsquigarrow$ PER $-3<x<-2$ È NECESSARIO VERIFICARE IL PASSO BASE PER $n_0 \geq \frac{1}{-x-2}$ DISPARI

ES. $\quad n_0=3 \qquad y=-x$

$$(1-y)^3=1-3y+3y^2-y^3 \overset{?}{\leq} 1-3y$$

$$3y^2-y^3 \geq 0 \qquad y^2(3-y) \geq 0 \quad \text{OK}$$

2. Provare a dimostrare che per ogni $x \geq 0$ si ha che

(a) $$(1+x)^n \geq \frac{n(n+1)}{2}x^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

e vedere che succede. Provare invece a dimostrare che

(b) $$(1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(c) Generalizzare questo tipo di disuguaglianze (avendo in mente il Binomio di Newton).

(a) PER $X=0$ $(1+0)^n = 1 \geq 0$ OK, DIMOSTRIAMO CHE:

$$\forall x > 0 \quad (1+x)^n \geq \frac{n(n+1)}{2} x^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

PASSO BASE: $n=0$ $\quad 1 \geq 0$

PASSO INDUTTIVO: $(1+x)^n \geq \frac{n(n+1)}{2}x^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (1+x)^{n+1} \geq \frac{(n+1)(n+2)}{2}x^2$$

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \overset{?}{\geq} (1+x)\frac{n(n+1)}{2}x^2 =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}x^2 + \frac{n(n+1)}{2}x^3 + (n+1)x^2 - (n+1)x^2 =$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}x^2 + \frac{n(n+1)}{2}x^3 - (n+1)x^2 \geq$$

$$\overset{?}{\geq} \frac{(n+1)(n+2)}{2}x^2 \iff \frac{n(n+1)}{2}x^3 - (n+1)x^2 \geq 0$$

$$(n+1)x^2\left(\frac{n}{2}x - 1\right) \geq 0 \qquad n \geq \frac{2}{x} > 0$$

SI DEVE RIVERIFICARE IL PASSO BASE

PASSO BASE: $n=1$ $\quad 1+x \geq x^2 \quad x^2-x-1 \leq 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+5}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \qquad 0 < x \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} < 2$$

$\rightsquigarrow$ IL P. INDUTT. NON FUNZIONA PERCHÉ DOVREBBE ESSERE $n \geq 2/x > 1$

PASSO BASE: $n=2 \qquad (1+x)^2 \geq 3x^2 \qquad 2x^2-2x-1 \leq 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} \qquad 0 < x \leq \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

IN TAL CASO IL PASSO INDUTTIVO FUNZIONA:

$$n \geq \frac{2}{x} \geq \frac{4}{1+\sqrt{3}} \simeq 1.5$$

PASSO BASE: $n=3 \qquad (1+x)^3 \geq 6x^2 \qquad 1+3x-3x^2+x^3 \geq 0$

$$1 + x\underbrace{(3-3x+x^2)}_{>0} \geq 0 \qquad \forall x > 0$$

IL PASSO INDUTTIVO RICHIEDE: $n \geq \frac{2}{x} \rightsquigarrow x \geq \frac{2}{3}$

$$\rightsquigarrow \forall x \geq \frac{2}{3} \quad (1+x)^n \geq \frac{n(n+1)}{2}x^2 \qquad \forall n \geq 3$$

PER $n=0$ // $\forall x \geq 0$

$n=1$ // $\forall x \in \left[0, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right]$

$n=2$ // $\forall x \in \left[0, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right]$

(b) $\forall x \geq 0 \quad (1+x)^n \geq 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

PASSO BASE: $n=0 \qquad 1 \geq 1$ ok

PASSO INDUTTIVO: $(1+x)^n \geq 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x+\frac{n(n+1)}{2}x^2$$

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)\left(1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2\right) =$$

$$= 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+x+nx^2+\frac{n(n-1)}{2}x^3 =$$

$$= 1+(n+1)x+\frac{n(n+1)}{2}x^2+\frac{n(n-1)}{2}x^3 \geq$$

$$\geq 1+(n+1)x+\frac{n(n+1)}{2}x^2 \iff \frac{n(n-1)}{2}x^3 \geq 0 \qquad \text{ok}$$

(c) $\forall x \geq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \geq \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} x^k \quad \forall m \leq n$$

3. (Stime per radici n-esime)

   (a) Dimostrare che per ogni intero $n \geq 1$ vale la stima
   $$\sqrt[n]{2} \leq 1 + \frac{1}{n}.$$
   Determinare una stima analoga per $\sqrt[n]{a}$ in funzione del parametro $a > 1$.

   (b) Dimostrare che per ogni intero $n \geq 1$ vale la stima
   $$\sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}.$$

(a) $$\forall n \geq 1 \quad \sqrt[n]{2} \leq 1 + \frac{1}{n} \overset{\text{MONOTONIA}}{\iff} 2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \overset{\text{BERNOULLI}}{\geq} 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2$$

$$\sqrt[n]{a} \leq 1 + \frac{(a-1)}{n} \iff a \leq \left(1 + \frac{(a-1)}{n}\right)^n$$

$$\left(1 + \frac{(a-1)}{n}\right)^n \overset{\text{BERNOULLI}}{\geq} 1 + n\frac{(a-1)}{n} = a \quad \forall a > 0$$

(b) $$\forall n \geq 1 \quad \sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}$$

4. Dimostrare che per ogni coppia di numeri naturali $k \leq n$ vale la disuguaglianza

$$\binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{2^k}. \quad ?$$

$m = 2 \qquad n = 1 \qquad \binom{2}{1} = 2 > \frac{2}{2} = 1$

$m = 3 \qquad n = 2 \qquad \binom{3}{2} = 3 > \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

$m = 4 \qquad n = 3 \qquad \binom{4}{3} = 4 > \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27}$

7/9

5. Dimostrare che per ogni intero $n \geq 1$ si ha che

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{1}{2}\lfloor \log_2 n \rfloor,$$

dove $\lfloor \alpha \rfloor$ indica la parte intera del numero reale α, cioè il più piccolo intero $m \leq \alpha$.

$$\begin{cases} n & 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & \dots & 2^m \\ \log_2 n & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & m \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{1}{2}\lfloor \log_2 n \rfloor \iff \sum_{n=1}^{2^m} \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{m}{2}$$

PASSO BASE: $m = 0$ $\quad \sum_{n=1}^{1} \frac{1}{n} = 1 \geq 1$ OK

PASSO INDUTTIVO:

$$\sum_{n=1}^{2^m} \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{m}{2} \implies \sum_{n=1}^{2^{m+1}} \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{m+1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{2^{m+1}} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{2^m} \frac{1}{n} + \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{1}{n} \overset{\text{HP. IND.}}{\geq} 1 + \frac{m}{2} + \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{1}{n} =$$

$$= 1 + \frac{m+1}{2} - \frac{1}{2} + \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{1}{n} \overset{?}{\geq} 1 + \frac{m+1}{2}$$

$$\iff -\frac{1}{2} + \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{1}{n} \geq 0 \qquad \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{1}{n} \geq \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{1}{n} \geq \underbrace{\left(2^{m+1} - (2^m+1) + 1\right)}_{\#\text{ DI TERMINI}} \underbrace{\frac{1}{2^{m+1}}}_{\text{VAL. MIN.}} =$$

$$= \left(2 \cdot 2^m - 2^m\right) \frac{1}{2^{m+1}} = \frac{2^m}{2^{m+1}} = \frac{1}{2}$$

6. Dimostrare che
$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{n^2}<2 \qquad \forall n\geq 1.$$

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{n^2}<2 \qquad \forall n\geq 1 \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \qquad 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{(2^m)^2}<2 \qquad \forall m\geq 0$$

$$1+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{(2^m)^2}<1+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{(2^m)^2}+\ldots+\frac{1}{(2^{m+1})^2-1}=$$

$$=1+\underbrace{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right)}_{2\text{ TERMINI}}+\underbrace{\left(\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{49}\right)}_{7-4+1=4\text{ TERMINI}}+\ldots+\underbrace{\left(\frac{1}{(2^m)^2}+\ldots+\frac{1}{(2^{m+1})^2-1}\right)}_{2^{m+1}-1-2^m+1=2^m\text{ TERMINI}}<$$

$$<1+2\cdot\frac{1}{4}+2^2\cdot\frac{1}{16}+\ldots+2^m\frac{1}{(2^m)^2}=$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^m}=\sum_{n=0}^{m}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}}{1-\frac{1}{2}}=$$

$$=2-2\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}<2$$