Generatori e Span 2

Argomenti: Span di un insieme di vettori **Difficoltà:** ⋆⋆⋆

Prerequisiti: Span, indipendenza lineare, generatori, algoritmo di Gauss

---

Nel seguente tabella vengono assegnati uno spazio vettoriale ed un po' di elementi dello spazio stesso. Determinare se gli elementi indicati sono linearmente indipendenti, e la dimensione del loro Span. Nel caso in cui non siano linearmente indipendenti, si chiede di determinare anche quali dei vettori assegnati possono essere eliminati in modo da ottenere una base dello Span stesso.

	Spazio	Vettori	Lin. ind.?	Dim Span	Possibili eliminandi
1)	$\mathbb{R}^3$	$v_1 = (1,2,0)$ $v_2 = (2,1,1)$ $v_3 = (2,4,0)$ $v_4 = (0,1,1)$	NO	3	V_1, V_3
2)	$\mathbb{R}^4$	$v_1 = (1,0,1,0)$ $v_2 = (0,-1,1,1)$ $v_3 = (1,1,0,-1)$ $v_4 = (0,0,1,1)$	NO	3	V_1, V_2, V_3
3)	$\mathbb{R}^4$	$v_1 = (1,1,1,0)$ $v_2 = (0,1,1,1)$ $v_3 = (1,0,0,-1)$	NO	2	V_1, V_2, V_3
4)	$\mathbb{R}^5$	$v_1 = (1,2,3,4,5)$ $v_2 = (5,4,3,2,1)$ $v_3 = (-1,2,-3,4,-5)$ $v_4 = (0,1,0,2,0)$	NO	3	V_2, V_3, V_4
5)	$\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$	$v_1 = x^2 + 2x$ $v_2 = x^3 + 2$	SÍ	2	—
6)	$\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$	$v_1 = x - 1$ $v_2 = x^2 - 2$ $v_3 = x^3 - 3$	SÍ	3	—
7)	$\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$	$v_1 = x^3 - x^2$ $v_2 = x^2 - x$ $v_3 = x - x^3$	NO	2	V_1, V_2, V_3
8)	$\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$	$v_1 = x^2 + 2x + 3$ $v_2 = x^3 - 2x^2 + 1$ $v_3 = 2x^3 + x^2 + x + 1$ $v_4 = x^3 - x$	SÍ	4	—

Spazio	Vettori	Lin. ind.?	Dim Span	Possibili eliminandi
$\mathbb{R}^3$	$v_1 = (1,2,0)$ $v_2 = (2,1,1)$ $v_3 = (2,4,0)$ $v_4 = (0,1,1)$	NO	3	V_1, V_3

1)

$$\begin{array}{cccc} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

2)

Spazio	Vettori	Lin. ind.?	Dim Span	Possibili eliminandi
$\mathbb{R}^4$	$v_1 = (1,0,1,0)$ $v_2 = (0,-1,1,1)$ $v_3 = (1,1,0,-1)$ $v_4 = (0,0,1,1)$	NO	3	V_1, V_2, V_3

$$\begin{array}{cccc} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3)

Spazio	Vettori	Lin. ind.?	Dim Span	Possibili eliminandi
$\mathbb{R}^4$	$v_1 = (1,1,1,0)$ $v_2 = (0,1,1,1)$ $v_3 = (1,0,0,-1)$	NO	2	V_1, V_2, V_3

$$\begin{array}{ccc} V_1 & V_2 & V_3 \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4)

Spazio	Vettori	Lin. ind.?	Dim Span	Possibili eliminandi
$\mathbb{R}^5$	$v_1 = (1,2,3,4,5)$ $v_2 = (5,4,3,2,1)$ $v_3 = (-1,2,-3,4,-5)$ $v_4 = (0,1,0,2,0)$	NO	3	V_1, V_3, V_4

$$\begin{array}{cccc} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & -5 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 4 & 1 \\ 0 & -12 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & 8 & 2 \\ 0 & -24 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -16 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \text{NO} & \uparrow & \uparrow \end{array} \end{array}$$

5)	$\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$	$v_1 = x^2 + 2x$ $v_2 = x^3 + 2$	SÍ	2	—

$$\begin{array}{cc} V_1 & V_2 \\ \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} V_1 & V_2 & V_3 \\ \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6)	$\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$	$v_1 = x - 1$ $v_2 = x^2 - 2$ $v_3 = x^3 - 3$	SÍ	3	—

7)	$\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$	$v_1 = x^3 - x^2$ $v_2 = x^2 - x$ $v_3 = x - x^3$	NO	2	V_1, V_2, V_3

$$\begin{array}{ccc} V_1 & V_2 & V_3 \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8)	$\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$	$v_1 = x^2 + 2x + 3$ $v_2 = x^3 - 2x^2 + 1$ $v_3 = 2x^3 + x^2 + x + 1$ $v_4 = x^3 - x$	SÍ	4	—

$$\begin{array}{cccc} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \\ \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -5 & -3 \\ 0 & 7 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -9 & -5 \\ 0 & 0 & -16 & -7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -9 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 17 \end{pmatrix}$$

$(\det = 153/9 = 17)$