Funzioni – Esercizi Teorici 2

Argomenti: funzioni tra insiemi **Difficoltà**: ⋆⋆⋆

Prerequisiti: funzioni tra insiemi, iniettività, surgettività, immagine e controimmagine

---

1. Siano A e B due insiemi, e sia $f : A \to B$ una funzione. Supponiamo che esista $g : B \to A$ tale che $g(f(a)) = a$ per ogni $a \in A$, e che esista $h : B \to A$ tale che $f(h(b)) = b$ per ogni $b \in B$.

   Possiamo concludere che f è invertibile?

2. Siano A e B due insiemi. Discutere la validità dei seguenti enunciati (hint: uno è vero, l'altro no ma quasi).
   (a) Se esiste $f : A \to B$ iniettiva, allora esiste $g : B \to A$ surgettiva.
   (b) Se esiste $f : A \to B$ surgettiva, allora esiste $g : B \to A$ iniettiva.

3. Sia A un insieme, e sia $f : A \to A$ una funzione tale che $f(f(a)) = f(a)$ per ogni $a \in A$. Indichiamo con $\mathrm{Fix}(A) = \{a \in A : f(a) = a\}$ l'insieme dei punti fissi di f.
   (a) Dimostrare che $f(A) = \mathrm{Fix}(A)$.
   (b) Dimostrare che f è iniettiva se e solo se f è l'identità (cioè $f(a) = a$ per ogni $a \in A$).
   (c) Dimostrare che f è surgettiva se e solo se f è l'identità.
   (d) Indicata con $f^{(n)}$ la funzione f composta con se stessa n volte, dimostrare che $f^{(n)}(a) = f(a)$ per ogni $a \in A$ ed ogni intero positivo n.

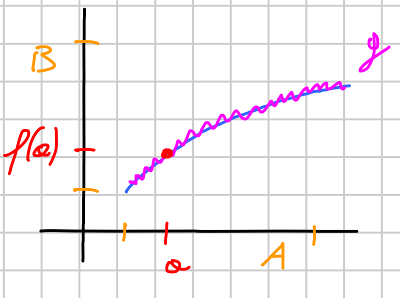
4. (Proprietà insiemistiche di immagine e controimmagine)
   (a) Enunciare per bene (quantificando tutto e specificando caso per caso chi sono f, D ed E) e poi dimostrare le eventuali relazioni di inclusione tra
   $$f(D \cup E) \text{ e } f(D) \cup f(E), \qquad f(D \cap E) \text{ e } f(D) \cap f(E),$$
   $$f^{-1}(D \cup E) \text{ e } f^{-1}(D) \cup f^{-1}(E), \qquad f^{-1}(D \cap E) \text{ e } f^{-1}(D) \cap f^{-1}(E).$$
   (b) Stessa cosa con la differenza $D \setminus E$ e la differenza simmetrica $D \triangle E$.
   (c) Generalizzare il punto (a) al caso di unioni ed intersezioni di famiglie arbitrarie di sottoinsiemi.
   (d) Enunciare e dimostrare le relazioni tra $f^{-1}(f(D))$ e D e tra $f(f^{-1}(E))$ e E.
   (e) Determinare cosa cambia nelle inclusioni del punto (d), rispetto al caso generale, se si assume che f sia iniettiva e/o surgettiva.

5. Dimostrare che per ogni insieme A si verifica una ed una sola delle seguenti tre possibilità:
   - $A = \emptyset$,
   - esiste un intero positivo n ed una funzione bigettiva $f : A \to \{1, \ldots, n\}$,
   - esiste una funzione $f : A \to A$ iniettiva ma non surgettiva.

   [to be completed]

1. Siano A e B due insiemi, e sia $f : A \to B$ una funzione. Supponiamo che esista $g : B \to A$ tale che $g(f(a)) = a$ per ogni $a \in A$, e che esista $h : B \to A$ tale che $f(h(b)) = b$ per ogni $b \in B$.

   Possiamo concludere che f è invertibile?



INVERSA SINISTRA

INVERSA DESTRA

(vd. TEST 13)

$$\begin{cases} \exists\, g : B \to A \quad g(f(a)) = a \quad \forall a \in A \iff f \text{ INIETTIVA} \\ \exists\, h : B \to A \quad f(h(b)) = b \quad \forall b \in B \iff f \text{ SURGETTIVA} \end{cases}$$

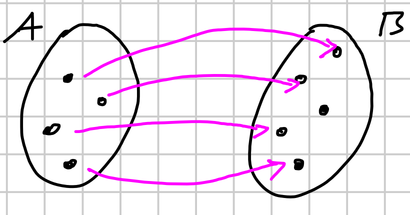
$$\iff f \text{ È BIGETTIVA} \equiv \text{È INVERTIBILE}$$

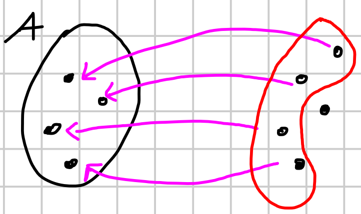
2. Siano A e B due insiemi. Discutere la validità dei seguenti enunciati (hint: uno è vero, l'altro no ma quasi).

   (a) Se esiste $f : A \to B$ iniettiva, allora esiste $g : B \to A$ surgettiva.

   (b) Se esiste $f : A \to B$ surgettiva, allora esiste $g : B \to A$ iniettiva.

(a)



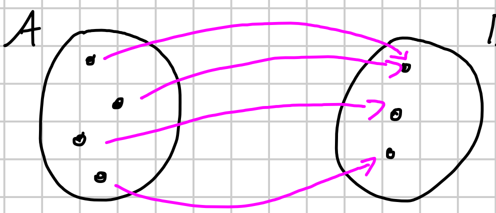


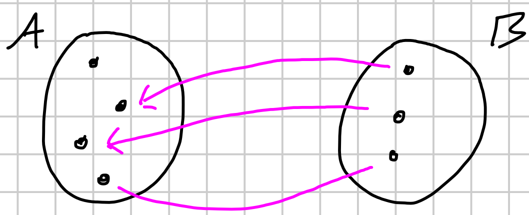
$\overline{B} \subseteq B$

$A \neq \emptyset \quad \exists\, g : \overline{B} \subseteq B \to A$ SURGETTIVA

$A = \emptyset \quad \nexists\, g : \overline{B} \subseteq B \to A$ SURGETTIVA

(b)





$\exists\, g : B \to A$ INIETTIVA

3. Sia A un insieme, e sia $f : A \to A$ una funzione tale che $f(f(a)) = f(a)$ per ogni $a \in A$. Indichiamo con $\mathrm{Fix}(A) = \{a \in A : f(a) = a\}$ l'insieme dei punti fissi di f.

(a) Dimostrare che $f(A) = \mathrm{Fix}(A)$.

(b) Dimostrare che f è iniettiva se e solo se f è l'identità (cioè $f(a) = a$ per ogni $a \in A$).

(c) Dimostrare che f è surgettiva se e solo se f è l'identità.

(d) Indicata con $f^{(n)}$ la funzione f composta con se stessa n volte, dimostrare che $f^{(n)}(a) = f(a)$ per ogni $a \in A$ ed ogni intero positivo n.

(a) $f(A) = \{ f(a) : a \in A \} \subseteq A$ IMMAGINE DI A

(i) $b \in f(A) \Rightarrow b \in \mathrm{Fix}(A)$

$\forall b \in f(A) \ \exists \alpha \in a$ t.c. $b = f(\alpha)$

$\Rightarrow f(b) = f(f(\alpha)) = f(\alpha) = b \Rightarrow b \in \mathrm{Fix}(A)$

(ii) $b \in \mathrm{Fix}(A) \Rightarrow b \in f(A)$

$\forall \ b \in \mathrm{Fix}(A) \quad b = f(b) \in f(A)$

$\rightsquigarrow f(A) = \mathrm{Fix}(A)$

(b) (i) f INIETTIVA $\Rightarrow f(a) = a \ \forall a \in A$

$\forall a \in A \quad f(a) = b \Rightarrow f(f(a)) = f(b) = f(a)$

$\Rightarrow a = b \quad \rightsquigarrow f(a) = a$

(ii) $f(a) = a \ \forall a \in A \Rightarrow f$ INIETTIVA

$\forall a_1 \in A \ \forall a_2 \in A \quad a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) = a_1 \neq a_2 = f(a_2)$

$\rightsquigarrow f$ INIETTIVA $\Leftrightarrow f(a) = a \ \forall a \in A$

(c) (i) f SURGETTIVA $\Rightarrow f(a)=a \ \forall a\in A$

$\forall a\in A \quad \exists b\in A \quad f(b)=a$

$\Rightarrow f(f(b)) = f(a) = f(b) = a \ \rightsquigarrow \ f(a)=a$

(ii) $f(a)=a \ \forall a\in A \Rightarrow f$ SURGETTIVA

$\rightsquigarrow$ f SURGETTIVA $\Leftrightarrow f(a)=a \ \forall a\in A$

(d) PER INDUZIONE

PASSO BASE: $f(a) = f(a)$

PASSO INDUTTIVO: $f^n(a) = f(a) \Rightarrow f^{n+1}(a) = f(a)$

$f^n(a) = f(a) \Rightarrow f(f^n(a)) = f^{(n+1)}(a) = f^n(a) = f(a)$

$\rightsquigarrow f^{n+1}(a) = f(a) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

4. (Proprietà insiemistiche di immagine e controimmagine)

(a) Enunciare per bene (quantificando tutto e specificando caso per caso chi sono f, D ed E) e poi dimostrare le eventuali relazioni di inclusione tra

$$f(D \cup E) \text{ e } f(D) \cup f(E), \qquad f(D \cap E) \text{ e } f(D) \cap f(E),$$
$$f^{-1}(D \cup E) \text{ e } f^{-1}(D) \cup f^{-1}(E), \qquad f^{-1}(D \cap E) \text{ e } f^{-1}(D) \cap f^{-1}(E).$$

(b) Stessa cosa con la differenza $D \setminus E$ e la differenza simmetrica $D \triangle E$.

(c) Generalizzare il punto (a) al caso di unioni ed intersezioni di famiglie arbitrarie di sottoinsiemi.

(d) Enunciare e dimostrare le relazioni tra $f^{-1}(f(D))$ e D e tra $f(f^{-1}(E))$ e E.

(e) Determinare cosa cambia nelle inclusioni del punto (d), rispetto al caso generale, se si assume che f sia iniettiva e/o surgettiva.

(a) $f: A \to B \qquad D \subseteq A \qquad E \subseteq A$

$f(D \cup E) = f(D) \cup f(E)$

DIM. $b \in f(D \cup E) \iff b = f(a) \quad a \in D \cup E$

$\iff b = f(a) \in f(D) \vee b = f(a) \in f(E)$

$\iff b \in f(D) \cup f(E)$

$f(D \cap E) \subseteq f(D) \cap f(E)$

DIM. (i) $\forall b \in f(D \cap E) \neq \emptyset \quad \exists a \in D \cap E$ t.c. $f(a) = b$

$\Rightarrow f(a) \in f(D) \wedge f(a) \in f(E) \Rightarrow b \in f(D) \cap f(E)$

(ii) SIA $D \cap E = \emptyset$ E $f(D) \cap f(E) \neq \emptyset$

$\Rightarrow \forall b \in f(D) \cap f(E) \ \exists a \in D \cup E \quad f(a) = b$

$a \notin D \cap E = \emptyset \qquad b \notin f(D \cap E)$

$f: A \to B \qquad D \subseteq B \qquad E \subseteq B$

$f^{-1}(D \cup E) = f^{-1}(D) \cup f^{-1}(E)$

DIM. $a \in f^{-1}(D \cup E) \Leftrightarrow f(a) \in D \cup E$

$\Leftrightarrow f(a) \in D \vee f(a) \in E \Leftrightarrow a \in f^{-1}(D) \vee a \in f^{-1}(E)$

$\Leftrightarrow a \in f^{-1}(D) \cup f^{-1}(E)$

$f^{-1}(D \cap E) = f^{-1}(D) \cap f^{-1}(E)$

DIM. $a \in f^{-1}(D \cap E) \Leftrightarrow f(a) \in D \cap E$

$\Leftrightarrow f(a) \in D \wedge f(a) \in E \Leftrightarrow a \in f^{-1}(D) \wedge a \in f^{-1}(E)$

$\Leftrightarrow a \in f^{-1}(D) \cap f^{-1}(E)$

(b) $f: A \to B \qquad D \subseteq A \qquad E \subseteq A$

$f(D \setminus E) \supseteq f(D) \setminus f(E)$

DIM. (i) $b \in f(D) \setminus f(E) \Rightarrow \exists\, a \in D \setminus E \quad b = f(a)$

$\Rightarrow b \in f(D \setminus E)$

(ii) SIA $D \cap E = \emptyset \quad D \setminus E = D$

SIA $f(D) \cap f(E) \neq \emptyset$

$\Rightarrow f(D \setminus E) = f(D) \nsubseteq f(D) - f(E)$

$f : A \to B \qquad D \subseteq B \qquad E \subseteq B$

$f^{-1}(D \setminus E) = f^{-1}(D) \setminus f^{-1}(E)$

DIM. $a \in f^{-1}(D \setminus E) \Leftrightarrow f(a) \in D \setminus E$

$\Leftrightarrow f(a) \in D \vee f(a) \notin E \Leftrightarrow a \in f^{-1}(D) \vee a \notin f^{-1}(E)$

$\Leftrightarrow a \in f^{-1}(D) \setminus f^{-1}(E)$

$f : A \to B \qquad D \subseteq A \qquad E \subseteq A$

$f(D \Delta E) \supseteq f(D) \Delta f(E)$

DIM. (i) $b \in f(D) \Delta f(E)$

$\Rightarrow \exists a \in D \setminus E \vee a \in E \setminus D \quad b = f(a)$

$\Rightarrow b \in f(D \Delta E)$

(ii) SIA $D \cap E = \phi$ E $f(D) \cap f(E) \neq \phi$

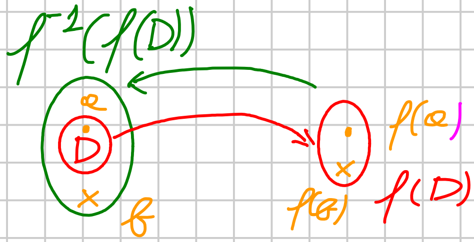
$\Rightarrow f(D \Delta E) \not\subseteq f(D) \Delta f(E)$

(c) $f(\cup A_i) = \cup f(A_i) \qquad f^{-1}(\cup A_i) = \cup f^{-1}(A_i)$

$f(\cap A_i) \subseteq \cap f(A_i) \qquad f^{-1}(\cap A_i) = \cap f^{-1}(A_i)$

(DIM. PER INDUZIONE)

(d) $f: A \to B \qquad D \subseteq A$



$$f^{-1}(f(D)) \supseteq D$$

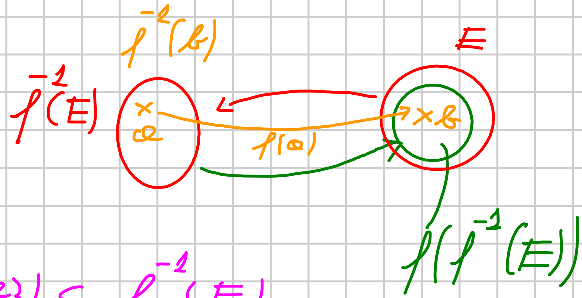
DIM. (i) $\forall a \in D \quad f(a) \in f(D)$

$\Rightarrow \quad a \in f^{-1}(f(a)) \subseteq f^{-1}(f(D))$

(ii) SIA $b \in A \setminus D \quad f(b) \in f(D)$

$\Rightarrow \quad b \in f^{-1}(f(b)) \not\subseteq D$

$f: A \to B \qquad E \subseteq B$



$$f(f^{-1}(E)) \subseteq E$$

DIM. (i) $\forall b \in f(f^{-1}(E)) \quad f^{-1}(\{b\}) \subseteq f^{-1}(E)$

$\exists a \in f^{-1}(E)$ S.C. $b = f(a) \in E$

(ii) SIA $b \in E$ S.C. $\nexists a \in A \quad b = f(a)$

$\Rightarrow \quad b \notin f(f^{-1}(E))$

(e) f INIETTIVA $\Rightarrow f^{-1}(f(D)) = D \quad \forall D \subseteq A$

f SURGETTIVA $\Rightarrow f(f^{-1}(E)) = E \quad \forall E \subseteq B$

5. Dimostrare che per ogni insieme A si verifica una ed una sola delle seguenti tre possibilità:

- $A = \emptyset$,
- esiste un intero positivo n ed una funzione bigettiva $f : A \to \{1, \ldots, n\}$,
- esiste una funzione $f : A \to A$ iniettiva ma non surgettiva.

DATO $A \rightsquigarrow \begin{cases} A = \phi & (1) \\ A \neq \phi \rightsquigarrow \begin{cases} A \text{ È FINITO} & (2) \\ A \text{ NON È FINITO} & (3) \end{cases} \end{cases}$

$A \neq \phi$ È FINITO $\rightsquigarrow \exists f : A \to \{1, \ldots, n\}$ BIGETTIVA

f INIETTIVA $\Leftrightarrow f$ SURIETTIVA (TEST 13)

$A \neq \phi$ NON È FINITO $\rightsquigarrow \nexists f : A \to \{1, \ldots, n\}$ BIGETTIVA

$\exists f$ INIETTIVA MA NON SURGETTIVA

ES. $\forall a_i \in A \quad f(a_i) = b_i \quad b_i \neq b_j \quad \forall i \neq j$

$b_i \in A \setminus \{b_0\}$