Sottospazi vettoriali 2

Argomenti: spazi e relativi sottospazi vettoriali **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: definizione di sottospazio vettoriale

Nei punti successivi sono dati uno spazio vettoriale V ed un po' di relazioni che coinvolgono gli elementi di V. Determinare quale o quali delle relazioni date definiscono un sottospazio vettoriale di V. In caso affermativo, non sarebbe male determinare la dimensione ed una base del sottospazio (quando questa è finita, cioè nei primi due esercizi).

(Si intende che per le relazioni che definiscono un sottospazio occorre fare una dimostrazione, per quelle che non definiscono un sottospazio occorre specificare quali richieste della definizione di sottospazio vengono a mancare)

1. Spazio vettoriale: $M_{2\times 2}$ con elemento generico A. Relazioni da esaminare:

DIM=1 DIM=2

$$A + A^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \cancel{A \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}},$$

DIM=0 DIM=2

$$\cancel{A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} A, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} A = A \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

DIM=2

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \cancel{A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \qquad \cancel{A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}},$$

DIM=0 DIM=0 DIM=0

$$\cancel{A^2 = A}, \qquad A^t = 2A, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} A = A, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A = A.$$

2. Spazio vettoriale: $M_{2\times 3}$ con elemento generico A. Relazioni da esaminare:

DIM=4 DIM=0

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = A, \qquad \cancel{(1,2)A = (0,2,0)},$$

DIM=2 DIM=0

$$A \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad AA^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \cancel{A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}.$$

3. Spazio vettoriale: funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Relazioni da esaminare:

$$\boxed{f(3) = f(2013) = f(\pi) = 0} \qquad \boxed{f(k) = 0 \text{ per ogni } k \in \mathbb{Z}}$$

$$\boxed{\cancel{f(x) \in [0,2] \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}}} \qquad \boxed{f(x) = 0 \text{ per ogni } x \in [0,2]}$$

$$\boxed{f(2x) = xf(x) \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}} \qquad \boxed{f(2k) = f(2k+1) \text{ per ogni } k \in \mathbb{Z}}$$

$$\boxed{f \text{ derivabile e } f'(x) = x^2 f(x) \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}} \qquad \boxed{\cancel{f \text{ derivabile e } f'(x) = x[f(x)]^2}}$$