Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Scritto d'esame di Analisi Matematica 2

Pisa, 6 Settembre 2016

1. Consideriamo la funzione $f(x,y,z) = x^2 + y^3 + z^4$ e l'insieme

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0,\ y > 0,\ z > 0,\ xyz = 1\right\}.$$

Determinare estremo inferiore/superiore di $f(x,y,z)$ al variare di $(x,y,z) \in S$, precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo/massimo.

2. Sia S la sfera con centro in $(-1,0,2)$ e raggio 3, e sia

$$V = \{(x,y,z) \in S : x \geq 0\}.$$

Calcolare

$$\int_V (x^2 + y^3)\, dx\, dy\, dz.$$

3. Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$F(x,y) = (x^3 - y^3 + y, x^2 + y^2 + x).$$

   (a) Dimostrare che esiste una successione $(x_n, y_n) \to (0,0)$ che per n sufficientemente grande soddisfa l'uguaglianza

$$F(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right),$$

   e che due qualunque successioni con queste proprietà coincidono definitivamente.

   (b) Studiare il comportamento delle serie $\sum x_n$ e $\sum y_n$.

   (c) (In parte bonus question) Studiare iniettività e surgettività della funzione $F(x,y)$.

4. Consideriamo il problema di Cauchy

$$u' = \frac{u - t}{u + t^2 + 1}, \qquad u(0) = \alpha.$$

   (a) Studiare l'esistenza globale nel passato e nel futuro per $\alpha < -1$.

   (b) Determinare se esiste $\alpha > -1$ per cui non c'è esistenza globale.

   (c) Determinare se esiste $\alpha > -1$ per cui c'è esistenza globale.

   (d) Determinare se esiste $\alpha > -1$ per cui la soluzione è monotona nel suo intervallo massimale di esistenza.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato. Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.