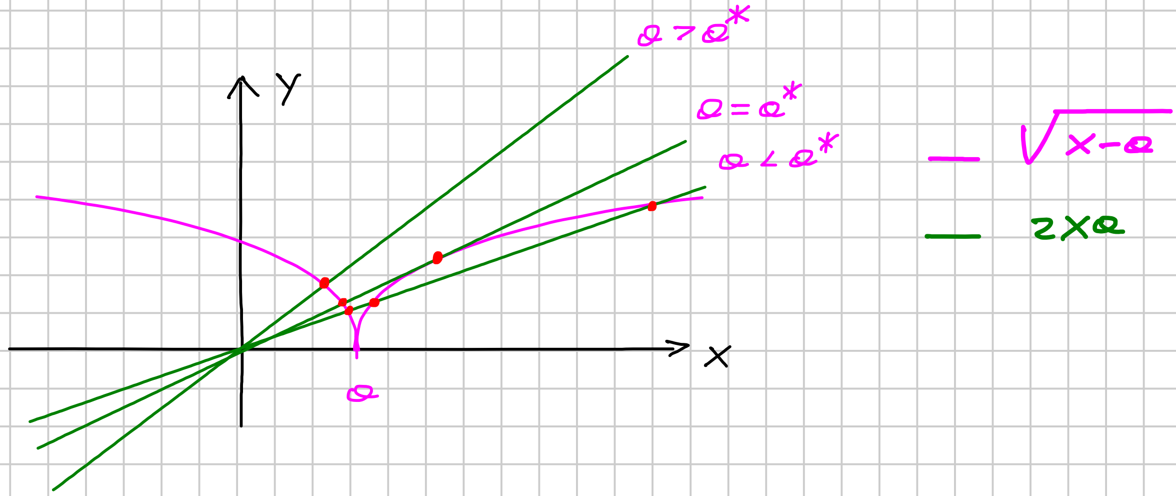
BY GIMUSI 30/07/16

determinare per quali valori del parametro reale $\boxed{a>0}$, l'equazione $2ax=\sqrt{|x-a|}$

ha due soluzioni reali e distinte

INTERPRETAZIONE GRAFICA



$$\rightsquigarrow \begin{cases} a > a^* & 1 \text{ SOLUZIONE} \\ a = a^* & 2 \text{ SOLUZIONI} \\ a < a^* & 3 \text{ SOLUZIONI} \end{cases}$$

a^* È INDIVIDUATO DAL PUNTO DI TANGENZA

$$(2ax)' = (\sqrt{x-a})' \qquad 2a = \frac{1}{2}(x-a)^{-1/2}$$

$$16a^2(x-a) = 1 \qquad x-a = \frac{1}{16a^2}$$

$$2a\left(\frac{1}{16a^2}+a\right) = \frac{1}{4a} \qquad \frac{1}{2}+8a^3 = 1 \qquad 8a^3 = \frac{1}{2} \qquad a^* = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$$

MODO ALGEBRICO

OSS LE SOLUZIONI DEVONO ESSERE >0

INFATTI $\sqrt{|x-a|} \geq 0$, $2ax \geq 0$, $x=0$ NON È MAI SOLUZIONE

DUE CASI

1) $x \geq a$ $\quad 4a^2x^2 = x-a \qquad 4a^2x^2 - x + a = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-16a^3}}{8a^2}$$

2 SOLUZIONI $\quad 1-16a^3 > 0 \qquad a < \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$

$$x \geq a \rightsquigarrow \frac{1 \pm \sqrt{1-16a^3}}{8a^2} \geq a$$

$1 \pm \sqrt{1-16a^3} \geq 8a^3 \qquad \pm\sqrt{1-16a^3} \geq 8a^3 - 1$ BASTA CONSID. SOLO IL "−"

$-\sqrt{1-16a^3} \geq 8a^3 - 1 \qquad \sqrt{1-16a^3} \leq 1 - 8a^3$

$$\begin{cases} 1-8a^3 \geq 0 & \left(\sqrt{1-16a^3}\right)^2 \leq (1-8a^3)^2 \qquad \cancel{1} - 16\cancel{a^3} \leq \cancel{1} - 16\cancel{a^3} + 64a^6 \\ & 64a^6 \geq 0 \qquad \forall a \in \mathbb{R} \\ 1-8a^3 < 0 & \sqrt{1-16a^3} \leq 1 - 8a^3 \qquad \forall a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ ENTRAMBE LE SOLUZIONI SONO VALIDE

1 SOLUZIONE $\qquad a = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$

$$x \geq a \rightsquigarrow \frac{1}{8a^2} \geq a \quad \text{OK}$$

$\rightsquigarrow$ LA SOLUZIONE È VALIDA

0 SOLUZIONI $\qquad a > \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$

2) $x<a$ $\qquad 4a^2x^2 = a - x \qquad 4a^2x^2 + x - a = 0$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{1+16a^3}}{8a^2} > 0 \qquad \cancel{x_2 = \frac{-1 - \sqrt{1+16a^3}}{8a^2}} < 0$$

NON ACCETTABILE!

$$x_1 < a \qquad \frac{-1 + \sqrt{1+16a^3}}{8a^2} < a \qquad \sqrt{1+16a^3} < 8a^3 + 1$$

$$1 + 8a^3 > 0 \qquad \left(\sqrt{1+16a^3}\right)^2 < \left(1 + 8a^3\right)^2 \qquad \cancel{1} + \cancel{16a^3} < \cancel{1} + \cancel{16a^3} + 64a^6$$

$$64a^6 > 0 \qquad \forall a > 0$$

$\rightsquigarrow$ LA SOLUZIONE x_1 ESISTE $\forall a > 0$

$\rightsquigarrow$ L'EQUAZIONE DATA AMMETTE DUE SOLUZIONI REALI DISTINTE PER

$$a = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$$