

# Scritto d'esame di Elementi di Calcolo delle Variazioni

Pisa, 22 Luglio 2016

1. Consideriamo il funzionale

$$F(u) = \int_0^1 (\dot{u} - u)^2 dx.$$

Studiare il problema di minimo per  $F(u)$  con ciascuna delle seguenti condizioni al bordo:

- (a)  $u(1) = 3$ ,
- (b)  $u(0) = u(1) = 3$ .

2. Discutere esistenza, unicità e regolarità per il problema

$$\ddot{u} = \frac{x}{x+1} \cdot \frac{u}{u+1}, \quad u(0) = u(2016) = 3.$$

3. Consideriamo, per ogni numero reale  $k$ , il problema di minimo

$$\inf \left\{ \int_0^3 (\dot{u}^2 - k \sin(u^2) + u^6) dx : u(0) = u(3) = 0 \right\}.$$

- (a) Determinare per quali valori di  $k \in \mathbb{R}$  l'estremo inferiore è in realtà un minimo.
- (b) Determinare per quali valori  $k \geq 0$  l'estremo inferiore è negativo.
- (c) Determinare se esistono valori  $k < 0$  per cui l'estremo inferiore è negativo.

4. (a) Dimostrare che per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste

$$I_\varepsilon = \min \left\{ \int_0^1 (\dot{u}^2 - u^4 + \varepsilon u^6) dx : \int_0^1 u^2 dx = \varepsilon \right\}.$$

- (b) Calcolare l'ordine di infinitesimo e la parte principale di  $I_\varepsilon$  per  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ .

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.  
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.