Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Scritto d'esame di Analisi Matematica 2

Pisa, 22 Luglio 2016

1. Determinare estremo inferiore/superiore della funzione

$$f(x, y, z) = \frac{xy}{1 + x^2 + y^4 + z^6}$$

al variare di (x, y, z) in $\mathbb{R}^3$, precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo/massimo.

2. Consideriamo la curva

$$\gamma(t) = \left\{(1 + 2t - 2t^2, t - 2t^2 + t^3) : t \in [0, 1]\right\}.$$

   (a) Dimostrare che la curva è chiusa e semplice.

   (b) Detto Ω l'aperto limitato di $\mathbb{R}^2$ che ha il sostegno di γ come bordo, calcolare l'area e le coordinate del baricentro di Ω.
   (È considerato accettabile esprimere le risposte in termini di integrali di polinomi di una variabile)

3. Consideriamo la successione di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(nx^2)}{xn^2}.$$

   (a) Dimostrare che la serie definisce una funzione $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ di classe C^1.

   (b) Calcolare il limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$.

   (c) (Bonus question) Calcolare il limite di $f(x)$ per $x \to 0^+$.

4. Consideriamo il problema di Cauchy

$$u' = \log(u + t) \arctan(u - t), \qquad u(0) = \alpha.$$

   (a) Dimostrare che per ogni $\alpha > 0$ la soluzione è globale (sia nel passato, sia nel futuro).

   (b) Determinare se esiste $\alpha > 0$ per cui la soluzione è monotona.

   (c) Determinare se esiste $\alpha > 0$ per cui la soluzione ha un punto di minimo globale.

   (d) Determinare, al variare di $\alpha > 0$, i possibili limiti di $u(t)$ per $t \to +\infty$.

> Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
> Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.