3) Determinare la soluzione generale del problema di Cauchy

$$t^2 u''(t) + a t u'(t) + b u(t) = 0$$

al variare dei parametri a e b.

Svolgimento:

Si tratta di una eq. diff. del secondo ordine, lineare, omogenea, a coefficienti qualunque.

Ponendo la sostituzione $v = \frac{u'}{u}$, segue che:

$$v' = \frac{u''u - (u')^2}{u^2} \Rightarrow v' = \frac{u''}{u} - v^2 \Rightarrow u'' = uv' + v^2 u$$

Sostituendo nell'eq. di partenza, otteniamo

$$t^2 u v' + t^2 v^2 u = -atu' - bu \Rightarrow$$

$$v' = -v^2 - \frac{a}{t} v - \frac{b}{t^2}$$

un'eq. del 1° ordine, non lineare, nota come eq. di Riccati.

Adesso si nota che per $b=0$ l'equazione ottenuta si trasforma in quella di Bernoulli:

$$v' = -\frac{a}{t} v - v^2, \quad \text{con } \alpha = 2$$

da cui, prendendo l'ulteriore cambio di variabili $y = v^{(1-\alpha)}$, otteniamo

$$y' = \frac{a}{t} y + 1, \quad \text{un'eq. lineare del 1° ordine.}$$

Ricorrendo alle formule risolutive, segue che: (E

$$A(t) = \int -\frac{a}{t}\,dt \Rightarrow A(t) = -a\log_e t = \log_e \frac{1}{t^a} \Rightarrow$$

$$y(t) = e\,t^a + t^a \int \frac{1}{x^a}\,dx = e\,t^a + t^a\left(\frac{t^{-a+1}}{1-a}\right) = e\,t^a + \frac{t}{1-a}$$

da cui, procedendo a ritroso, otteniamo:

$$v = \frac{1}{y} \Rightarrow v = \frac{1-a}{e\,t^a + t}$$

Essendo poi $v = \frac{u'}{u}$, segue che

$$\log_e |u| = \int \frac{1-a}{e\,t^a+t}\,dt \Rightarrow u(t) = \pm\, e^{\int \frac{1-a}{e\,t^a+t}\,dt}$$

che rappresenta la soluzione generale del problema dato per $b=0$. Si nota inoltre che:

per $a = 1 \Rightarrow u(t) \equiv \pm 1$

per $a = 0 \Rightarrow u(t) = k(t+c)$

Se nell'eq. di Riccati invece è $b \neq 0$, si osserva che $v_1 = \frac{b}{t}$ è soluzione particolare dell'eq per $b = -a$:

$$v_1 = \frac{b}{t} \Rightarrow v_1' = -\frac{b}{t^2} \Rightarrow$$

$$\cancel{-\frac{b}{t^2}} = -v_1^2 - \frac{a}{t}v_1 \cancel{-\frac{b}{t^2}} \Rightarrow -\cancel{v_1}\left(v_1 + \frac{a}{t}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{t}(b+a) = 0 \Rightarrow b = -a$$

Ponendo la sostituzione $y = \frac{1}{v - v_1}$, si ottiene:

$$v = \frac{1}{y} - \frac{a}{t} \Rightarrow v' = \frac{-y'}{y^2} + \frac{a}{t^2}$$

sostituendo nell'eq. di Riccati, segue che

$$+\frac{y'}{y^2} + \cancel{\frac{a}{t^2}} = +\left(\frac{1}{y}-\frac{a}{t}\right)^2 + \frac{a}{t}\left(\frac{1}{y}-\frac{a}{t}\right) + \cancel{\frac{a}{t^2}}$$ $\Rightarrow$ Ricordando che $b=-a$

$$\frac{y'}{y^2} = \left(\frac{1}{y}-\frac{a}{t}\right)\left[\frac{1}{y}-\cancel{\frac{a}{t}}+\cancel{\frac{a}{t}}\right] \Rightarrow y' = -\frac{a}{t}y + 1$$

ottenendo ancora un'eq. lineare del 1° ordine. Applicando le formule risolutive, segue che

$$A(t) = \int \frac{a}{t}\, d = a \log_e t = \log_e t^a$$

$$y(t) = \frac{c}{t^a} + \frac{1}{t^a}\int x^a\, dx = \frac{c}{t^a} + \frac{1}{t^a}\left(\frac{t^{a+1}}{a+1}\right) = \frac{c}{t^a} + \frac{t}{1+a} \Rightarrow$$

$$y(t) = \frac{c(1+a)+t^{a+1}}{t^a(1+a)}$$

Procedendo a ritroso, ricaviamo $v(t)$:

$$v = \frac{t^a(1+a)}{c(1+a)+t^{a+1}} - \frac{a}{t} = \frac{t^{a+1} + \cancel{a t^{a+1}} - a(1+a)c - \cancel{a t^{a+1}}}{t\left[c(1+a)+t^{a+1}\right]} =$$

$$\frac{t^{a+1} - a c_1}{c_1 t + t^{a+2}}$$

e di seguito $u(t)$:

$$\log_e|u| = \int v(t)\, dt \Rightarrow u(t) = \pm e^{\int \frac{t^{a+1}-ac_1}{c_1 t + t^{a+2}} dt}$$

che rappresenta la soluzione generale del problema dato per $a=-b$.