7) $\begin{cases} u' = u \log_e u \\ u(0) = \alpha \end{cases}$

$$\frac{du}{u \log_e u} = dt \Rightarrow \log_e |\log_e u| = t + c \Rightarrow |\log_e u| = e^{t+c} \Rightarrow \log_e u = k e^t \Rightarrow$$

$u(t) = e^{k e^t}$ Soluzione generale

$u(0) = e^k = \alpha \Rightarrow k = \log_e \alpha \Rightarrow u(t) = e^{(\log_e \alpha) e^t}$ Soluzione del problema di Cauchy.

$0 < \alpha < 1 \Rightarrow$ Intervallo massimale di esistenza : $(-\infty, +\infty)$

Tempo di vita nel futuro: Esistenza globale, con $\lim_{t \to +\infty} u(t) = 0$

Tempo di vita nel passato: Exist. glob., con $\lim_{t \to -\infty} u(t) = 1$

$\alpha = 1 \Rightarrow$ Soluzione costante $u(t) \equiv 1$

$\alpha > 1 \Rightarrow$ Intervallo massimale di esistenza : $(-\infty, +\infty)$

Tempo di vita nel futuro: Exist. glob., con $\lim_{t \to +\infty} u(t) = +\infty$

Tempo di vita nel passato: Exist. globale, con $\lim_{t \to -\infty} u(t) = 1$

8) $\begin{cases} u' = u (\log_e u)^3 \\ u(0) = \alpha \end{cases}$

$$\frac{du}{u(\log_e u)^3} = dt \Rightarrow -\frac{1}{2(\log_e u)^2} = t + c \Rightarrow \frac{1}{(\log_e u)^2} = c - 2t \Rightarrow$$

$$\log_e u = \pm \sqrt{\frac{1}{c - 2t}} \Rightarrow u = e^{\pm \sqrt{\frac{1}{c-2t}}}$$

Impongo le condizione iniziale per stabilire i segni ed il valore di c in funzione del parametro α:

$$u(0) = e^{\pm\sqrt{1/c}} = \alpha \Rightarrow \pm\sqrt{1/c} = \log_e \alpha \Rightarrow c = \frac{1}{(\log_e \alpha)^2} \Rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{1}{c - 2t}} = \sqrt{\frac{(\log_e \alpha)^2}{1 - 2(\log_e \alpha)^2 t}} = \frac{\log_e \alpha}{\sqrt{1 - 2(\log_e \alpha)^2 t}} \Rightarrow$$

$$u(t) = e^{\pm \log_e \alpha / \sqrt{1 - 2(\log_e \alpha)^2 t}}$$

Dovendo essere $u(0)=\alpha$, scegliamo il segno $(+)$ $\Rightarrow$

$$u(t) = e^{\left(\log_e \alpha \,/\, \sqrt{1-2(\log_e \alpha)^2 t}\right)}$$ Soluzione del problema di Cauchy.

$0<\alpha<1$ $\Rightarrow$ Intervallo massimale di esistenza: $\left(-\infty, \frac{1}{2(\log_e \alpha)^2}\right)$

Tempo di vita nel futuro: $T = \frac{1}{2(\log_e \alpha)^2}$, con $\lim_{t\to T^-} u(t) = 0$

Tempo di vita nel futuro $\to 0$ per $\alpha \to 0^+$

" " " $\to +\infty$ per $\alpha \to 1^-$

Tempo di vita nel passato: Esist. glob., con $\lim_{t\to -\infty} u(t) = 1$

$\alpha = 1$ $\Rightarrow$ Soluzione costante $u(t) \equiv 1$

$\alpha > 1$ $\Rightarrow$ Intervallo massimale di esistenza: $\left(-\infty, \frac{1}{2(\log_e \alpha)^2}\right)$

Tempo di vita nel futuro: $T = \frac{1}{2(\log_e \alpha)^2}$, con $\lim_{t\to T^-} u(t) = +\infty$ (BLOW UP)

Tempo di vita nel futuro $\to +\infty$ per $\alpha \to 1^+$

" " " $\to 0$ per $\alpha \to +\infty$

Tempo di vita nel passato: Esistenza globale, con $\lim_{t\to -\infty} \{u(t) = 1$