BY GIMUSI 11/06/2016

2. Consideriamo l'equazione differenziale

$$u'(t) + \frac{2u(t)}{t} = \cos t.$$

(a) Determinare la soluzione generale dell'equazione.

(b) Dimostrare che esiste un'unica funzione $u \in C^1(\mathbb{R})$ che soddisfa l'equazione per ogni $t \neq 0$.

a)

$$A(t) = \int \frac{2}{s}\, ds = \log t^2$$

$$u(t) = u_0 e^{-\log t^2} + e^{-\log t^2} \int e^{\log s^2} \cos s\, ds =$$

$$= \frac{u_0}{t^2} + \frac{1}{t^2} \int s^2 \cos s\, ds =$$

$$= \frac{u_0}{t^2} + \frac{1}{t^2}\left((t^2-2)\sin t + 2t\cos t\right) =$$

$$= \frac{u_0}{t^2} + \frac{t^2-2}{t^2}\sin t + \frac{2}{t}\cos t$$

b) $t \to 0$

$$\frac{u_0}{t^2} + \frac{t^2-2}{t^2}\sin t + \frac{2}{t}\cos t =$$

$$= \frac{u^0}{t^2} + \left(1 - \frac{2}{t^2}\right)\left(t - \frac{t^3}{6} + o(t^5)\right) + \frac{2}{t}\left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3)\right) =$$

$$= \frac{u_0}{t^2} + \cancel{t} - \cancel{\frac{t^3}{6}} - \cancel{\frac{2}{t}} + \frac{t}{3} + \cancel{\frac{2}{t}} - \cancel{t} + o(t^2) \to 0 \text{ PER } u_0 = 0$$

$\leadsto u(t) = \dfrac{t^2-2}{t^2}\sin t + \dfrac{2}{t}\cos t$ È SOLUZIONE $\in C^1(\mathbb{R})$ PER $t \neq 0$

$$u'(t) = \frac{4}{t^3}\sin t + \frac{t^2-2}{t^2}\cos t - \frac{2}{t^2}\cos t - \frac{2}{t}\sin t$$