Consideriamo l'eq. diff. $u'(t) + \frac{2u(t)}{t} = \cos(t)$.

a) Determinare la soluzione generale dell'equazione.

b) Dimostrare che esiste un'unica funzione $u \in C^1(\mathbb{R})$ che soddisfa l'eq. per ogni $t \neq 0$.

Svolgimento quesito a)

Trattandosi di un'eq. diff. lineare del 1° ordine, del tipo

$$u' + a(t)u = b(t)$$

si può ricorrere alla formula per la soluzione generale:

$$a(t) = \frac{2}{t} \Rightarrow A(t) = 2\log_e |t| = \log_e (t)^2 \quad \forall t \neq 0$$

Dunque, per la suddetta formula, la funzione $u(t)$ cercata è del tipo

$$* \quad u(t) = \frac{c}{t^2} + \frac{1}{t^2}\int x^2 \cos(x)\,dx$$

Devo quindi risolvere il seguente integrale: (integrando per parti)

$$\int x^2\cos(x)\,dx = x^2\sin(x) - 2\int x\sin(x)\,dx = x^2\sin(x) - 2\left[-x\cos(x) + \int\cos(x)\,dx\right] =$$

$$x^2\sin(x) + 2x\cos(x) - 2\sin(x)$$

Sostituendo nella formula risolutiva $*$ (con l'opportuna variabile t) ottengo che:

$$u(t) = \frac{c}{t^2} + \frac{1}{t^2}\left[t^2\sin(t) + 2t\cos(t) - 2\sin(t)\right],$$ cioè

$$u(t) = \frac{c}{t^2} + \left(1 - \frac{2}{t^2}\right)\sin(t) + \frac{2}{t}\cos(t)$$