Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Scritto d'esame di Analisi Matematica 2

Pisa, 7 Giugno 2016

1. Determinare estremo inferiore/superiore della funzione

$$f(x,y) = \frac{x^3 y}{1 + x^4 + y^4}$$

al variare di (x,y) in $\mathbb{R}^2$, precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo/massimo.

2. Consideriamo l'insieme

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq 0,\ z \geq 0,\ x^2 + y + z = 4\right\}.$$

   (a) Verificare che S è una superficie connessa.

   (b) Scrivere una parametrizzazione di ∂S.

   (c) Calcolare il flusso del campo

$$F(x,y,z) = (x + y, -2y + z, x + z)$$

   attraverso la superficie S orientata prendendo nel punto $(2,0,0)$ il vettore normale che punta verso le x negative.

3. Consideriamo la successione di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{x}{n^{1+x}}\right).$$

   (a) Dimostrare che la serie definisce una funzione continua $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$.

   (b) Calcolare

$$\lim_{x \to +\infty} f(x), \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x).$$

4. Consideriamo il problema di Cauchy

$$u' = \frac{\log(u + t)}{\arctan(u - t)}, \qquad u(0) = \alpha.$$

   (a) Dimostrare che esiste $\alpha > 0$ per cui la soluzione non è globale.

   (b) Determinare se esiste $\alpha \in (0,1)$ per cui la soluzione è globale (sia nel passato, sia nel futuro).

   (c) (Bonus question) Nel caso $\alpha = 2016$, studiare la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{u(t)}\, dt.$$

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.