Funzioni Analitiche

Osservazione 0.1. Sia $A \subset \mathbb{R}$ un aperto. Sia $f\colon A \to \mathbb{R}$ una funzione. Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di A. Supponiamo che $\forall i \in I$ si abbia che $f|_{U_i}$ sia analitica in U_i. Allora f è analitica in A.

Proposizione 0.1. *Per ogni $k \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in (-1,1)$ vale la formula:*

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} \tag{0.1}$$

Dimostrazione. Sostanzialmente si usa il teorema di scambio della derivata, vedi esercizio 5 della lezione 99. □

Teorema 0.2. *Sia $S(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \in \mathbb{R}[[X]]$ una serie formale con raggio di convergenza R finito e maggiore di zero. Allora la funzione*

$$\begin{aligned} f\colon (-R,R) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto S(x) \end{aligned}$$

è analitica in $(-R,R)$ e per ogni $x_0 \in (-R,R)$ il raggio di convergenza della sua serie di Taylor centrata in x_0 è almeno $R - |x_0|$.

Dimostrazione. Per dimostrare la prima parte troveremo un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_{x_0} \mid x_0 \in (-R,R)\}$ della forma $U_{x_0} = (x_0 - r_0, x_0 + r_0)$ per un certo $r_0 > 0$ dipendente da x_0 e tale che $f|_{U_{x_0}}$ sia analitica per ogni $U_{x_0} \in \mathcal{U}$, la tesi seguirà grazie all'osservazione iniziale. Poniamo $r_0 = \frac{R-|x_0|}{3}$ e mostriamo che $f|_{U_{x_0}}$ è analitica. Ricordiamo che $R = 1/L$ con $L = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \in \mathbb{R}$, per definizione di lim sup abbiamo che

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists M_\varepsilon \in \mathbb{R} :\ \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leq M_\varepsilon (L+\varepsilon)^n$$

mi gioco $\varepsilon = \frac{1}{R} \cdot \frac{R-|x_0|}{2R+|x_0|}$ (questa scelta è stata fatto in modo tale che $1/(L+\varepsilon) = (R+|x_0|+r_0)/2 = (2R+|x_0|)/3$). Allora per ogni $x \in (x_0 - r_0, x_0 + r_0)$ vale

$$|f^{(k)}(x)| = |\sum_{n=k}^{+\infty} a_n k! \binom{n}{k} x^{n-k}| \leq M_\varepsilon k! (L+\varepsilon)^k \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} [(L+\varepsilon)|x|]^{n-k} \tag{0.2}$$

il RHS converge per la prima proposizione per ogni x tale che $(L+\varepsilon)|x| < 1$, ma $|x| < |x_0| + r_0 = (R + 2|x_0|)/3 < (2R + |x_0|)/3 = 1/(L+\varepsilon)$ quindi converge per ogni $x \in (x_0 - r_0, x_0 + r_0)$ e si ha

$$\begin{aligned}
|f^{(k)}(x)| &\leq \frac{M_\varepsilon}{1-(L+\varepsilon)|x|} \cdot \frac{k!}{\left[\frac{1}{L+\varepsilon} - |x|\right]^k} \\
&\leq \frac{M_\varepsilon(2R+|x_0|)}{R-|x_0|} \cdot \frac{k!}{\left(\frac{R-|x_0|}{3}\right)^k} \\
&= M \cdot \frac{k!}{r_0^k}
\end{aligned}$$

dove $M = \frac{M_\varepsilon(2R+|x_0|)}{R-|x_0|} = \frac{M_\varepsilon}{r_0(L+\varepsilon)}$. Per il criterio di analiticità si conclude che posto $U_{x_0} = (x_0 - r_0, x_0 + r_0)$ la funzione f è analitica in U_{x_0} e quindi $\mathcal{U} = \{U_{x_0} \mid x_0 \in (-R, R)\}$ è il ricoprimento aperto cercato.
Per ogni $x_0 \in (-R, R)$ esiste $\varepsilon_0 > 0$ con la proprietà che $\forall \varepsilon < \varepsilon_0$ valga $(L+\varepsilon)|x_0| < 1$ allora per le equazioni 0.1 e 0.2 vale anche

$$|f^{(k)}(x_0)| \leq \frac{M_\varepsilon}{1-(L+\varepsilon)|x_0|} \cdot \frac{k!}{\left[\frac{1}{L+\varepsilon} - |x_0|\right]^k}$$

definendo ora

$$\alpha_k(x_0, \varepsilon) = \frac{M_\varepsilon}{1-(L+\varepsilon)|x_0|} \cdot \frac{1}{\left[\frac{1}{L+\varepsilon} - |x_0|\right]^k}$$

si ha banalmente $|f^{(k)}(x_0)| \leq k!\alpha_k(x_0, \varepsilon)$ e di conseguenza

$$L_{x_0} = \limsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\frac{|f^{(k)}(x_0)|}{k!}} \leq \limsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\alpha_k(x_0,\varepsilon)} = \frac{1}{\frac{1}{L+\varepsilon} - |x_0|}$$

e questa disuguaglianza vale $\forall \varepsilon < \varepsilon_0$ possiamo quindi fare il limite per $\varepsilon \to 0^+$ e ottenere $L_{x_0} \leq 1/(R - |x_0|)$ che ci dice che il raggio della serie di Taylor della f centrata in x_0 ha raggio di convergenza $R_{x_0} = 1/L_{x_0} \geq R - |x_0|$. Dobbiamo ora provare che la serie converge alla funzione, definiamo per ogni $x \in (-R_{x_0}, R_{x_0})$ la funzione $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ ma ora $g|_{U_{x_0}} = f|_{U_{x_0}}$ ma g ed f sono analitiche per la prima parte dell'enunciato e quindi coincidendo su un intervallo sono in realtà uguali nell'intersezione dei domini e quindi in $(-R_{x_0}, R_{x_0})$ che è proprio quello che volevamo dimostrare. $\square$