

Funzioni Analitiche

Osservazione 0.1. Sia $A \subset \mathbb{R}$ un aperto. Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di A . Supponiamo che $\forall i \in I$ si abbia che $f|_{U_i}$ sia analitica in U_i . Allora f è analitica in A .

Proposizione 0.1. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in (-1, 1)$ vale la formula:

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k}$$

Dimostrazione. Sostanzialmente si usa il teorema di scambio della derivata, vedi esercizio 5 della lezione 99. \square

Teorema 0.2. Sia $S(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \in \mathbb{R}[[X]]$ una serie formale con raggio di convergenza R finito e maggiore di zero. Allora la funzione

$$\begin{aligned} f: (-R, R) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto S(x) \end{aligned}$$

è analitica in $(-R, R)$ e per ogni $x_0 \in (-R, R)$ il raggio di convergenza della sua serie di Taylor centrata in x_0 è almeno $R - |x_0|$.

Dimostrazione. Per dimostrare la prima parte troveremo un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_{x_0} \mid x_0 \in (-R, R)\}$ della forma $U_{x_0} = (x_0 - r_0, x_0 + r_0)$ per un certo $r_0 > 0$ dipendente da x_0 e tale che $f|_{U_{x_0}}$ sia analitica per ogni $U_{x_0} \in \mathcal{U}$, la tesi seguirà grazie all'osservazione iniziale. Poniamo $r_0 = \frac{R-|x_0|}{3}$ e mostriamo che $f|_{U_{x_0}}$ è analitica. Ricordiamo che $R = 1/L$ con $L = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \in \mathbb{R}$, per definizione di \limsup abbiamo che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M_\varepsilon \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leq M_\varepsilon (L + \varepsilon)^n$$

mi gioco $\varepsilon = \frac{1}{R} \cdot \frac{R-|x_0|}{2R+|x_0|}$ (questa scelta è stata fatto in modo tale che $1/(L+\varepsilon) = (R + |x_0| + r_0)/2 = (2R + |x_0|)/3$). Allora per ogni $x \in (x_0 - r_0, x_0 + r_0)$ vale

$$|f^{(k)}(x)| = \left| \sum_{n=k}^{+\infty} a_n k! \binom{n}{k} x^{n-k} \right| \leq M_\varepsilon k! (L + \varepsilon)^k \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} [(L + \varepsilon)|x|]^{n-k}$$

il RHS converge per la prima proposizione per ogni x tale che $(L + \varepsilon)|x| < 1$, ma $|x| < |x_0| + r_0 = (R + 2|x_0|)/3 < (2R + |x_0|)/3 = 1/(L + \varepsilon)$ quindi converge per ogni $x \in (x_0 - r_0, x_0 + r_0)$ e si ha

$$\begin{aligned} |f^{(k)}(x)| &\leq \frac{M_\varepsilon}{1 - (L + \varepsilon)|x|} \cdot \frac{k!}{\left[\frac{1}{L + \varepsilon} - |x|\right]^k} \\ &\leq \frac{M_\varepsilon(2R + |x_0|)}{R - |x_0|} \cdot \frac{k!}{\left(\frac{R - |x_0|}{3}\right)^k} \\ &= M \cdot \frac{k!}{r_0^k} \end{aligned}$$

dove $M = \frac{M_\varepsilon(2R + |x_0|)}{R - |x_0|} = \frac{M_\varepsilon}{r_0(L + \varepsilon)}$. Per il criterio di analiticit  si conclude che posto $U_{x_0} = (x_0 - r_0, x_0 + r_0)$ la funzione f   analitica in U_{x_0} e quindi $\mathcal{U} = \{U_{x_0} \mid x_0 \in (-R, R)\}$   il ricoprimento aperto cercato. \square

Osservazione 0.2. Il raggio trovato non   ottimale, nella seconda parte mostreremo che si pu  ottenere di pi !