Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Prova in itinere di Analisi Matematica 2

Pisa, 22 Marzo 2016

1. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} n^2(\arctan x + \arctan y) + n\arctan(xy) = 1 \\ n^3(x-2y) + n^2\sin(y^2) = 3 \end{cases}$$

   (a) Dimostrare che per n sufficientemente grande il sistema ammette almeno una soluzione (x_n, y_n).

   (b) (Bonus question) Dimostrare che per n sufficientemente grande la soluzione è unica.

   (c) Dimostrare che $y_n \neq 0$ definitivamente.

   (d) Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n}.$$

2. Consideriamo la funzione $f(x, y) = x + e^{xy} + y^8$.

   (a) Dimostrare che esiste un'unica funzione $\varphi : [0, 1] \to (0, +\infty)$ tale che

$$f(x, \varphi(x)) = 17.$$

   (b) Dimostrare che la funzione φ è di classe C^∞.

   (c) Sia S la superficie di $\mathbb{R}^3$ ottenuta da una rotazione completa intorno all'asse x del grafico di φ. Consideriamo il campo

$$\vec{E} = \left(x - 1, 2y + \arctan z, \cos z - 3z + x^2 y\right).$$

   Calcolare il flusso di $\vec{E}$ attraverso S, assumendo su S l'orientazione uscente rispetto all'asse x.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere adeguatamente giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla correttezza ed alla chiarezza delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.