Spazi Euclidei – Esercizi teorici 2

Argomenti: Consolidamento della teoria **Difficoltà:** $\star\star\star\star$

Prerequisiti: Prodotto scalare, norma e distanza in $\mathbb{R}^n$, uso geometrico dei vettori

1. Dimostrare le seguenti proprietà della *distanza euclidea* (anche qui valgono le stesse considerazioni dei punti precedenti sulla necessità di precisare gli enunciati), osservando attentamente come le proprietà della distanza derivino da quelle della norma.
   - *Non-negatività*: $\operatorname{dist}(u, v) \geq 0$
   - $\operatorname{dist}(u, v) = 0$ se e solo se $u = v$.
   - *Simmetria*: $\operatorname{dist}(u, v) = \operatorname{dist}(v, u)$.
   - *Disuguaglianza triangolare*: $\operatorname{dist}(u, v) \leq \operatorname{dist}(u, w) + \operatorname{dist}(w, v)$. Spiegare da dove deriva il nome di questa disuguaglianza.
2. Trovare formule per esprimere $\|u+v\|^2$, $\|u-v\|^2$, e più in generale $\|au+bv\|^2$, in termini delle norme di u e v e del prodotto scalare tra u e v.
3. Dimostrare l'*identità di polarizzazione* (come sempre da quantificare) nelle sue varie forme
$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right),$$
$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u-v\|^2\right).$$
4. Trovare formule, in termini delle norme dei singoli vettori ed opportuni prodotti scalari, per
$$\|u+v-w\|^2 \qquad \|u+v-2w\|^2 \qquad \|3u-2v-w\|^2.$$
5. Siano P e Q punti in $\mathbb{R}^n$, pensati come vettori. Determinare, sempre come vettori:
   - il punto A del segmento PQ tale che $AP = AQ$,
   - il punto B del segmento PQ tale che $BP = 7BQ$,
   - il punto C della retta PQ, diverso da B, tale che $CP = 7CQ$,
   - il punto D della retta PQ, diverso da Q, tale che $DQ = PQ$.
6. Siano A, B, C tre punti di $\mathbb{R}^n$ pensati come vettori e vertici di un triangolo. Determinare:
   - i vettori corrispondenti ai punti medi dei lati,
   - il vettore corrispondente al baricentro,
   - le espressioni per le lunghezze dei lati come norme di opportuni vettori,
   - le espressioni per le lunghezze delle mediane, prima come norme di opportuni vettori, poi in funzione delle lunghezze dei lati.

1. Dimostrare le seguenti proprietà della *distanza euclidea* (anche qui valgono le stesse considerazioni dei punti precedenti sulla necessità di precisare gli enunciati), osservando attentamente come le proprietà della distanza derivino da quelle della norma.

   - *Non-negatività*: $\mathrm{dist}(u, v) \geq 0$
   - $\mathrm{dist}(u, v) = 0$ se e solo se $u = v$.
   - *Simmetria*: $\mathrm{dist}(u, v) = \mathrm{dist}(v, u)$.
   - *Disuguaglianza triangolare*: $\mathrm{dist}(u, v) \leq \mathrm{dist}(u, w) + \mathrm{dist}(w, v)$.
     Spiegare da dove deriva il nome di questa disuguaglianza.

$\forall\, u, v, w \in \mathbb{R}^n$

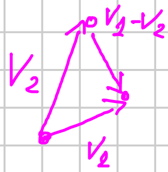
(a) $\mathrm{dist}(u,v) = \|u-v\| = \|w\| \geq 0$

(b) $\mathrm{dist}(u,v) = \|u-v\| = 0 \iff u-v=0 \implies u=v$

(c) $\mathrm{dist}(u,v) = \|u-v\| = \|(-1)(v-u)\| = |-1|\,\|v-u\| = \mathrm{dist}(v,u)$

(d) $\mathrm{dist}(u,v) = \|u-v\| = \|(u-w)+(w-v)\| \leq$ $\qquad \|v_1 - v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$

$\leq \|u-w\| + \|w-v\| = \mathrm{dist}(u,w) + \mathrm{dist}(w,v)$



2. Trovare formule per esprimere $\|u+v\|^2$, $\|u-v\|^2$, e più in generale $\|au+bv\|^2$, in termini delle norme di u e v e del prodotto scalare tra u e v.

$\forall\, u, v \in \mathbb{R}^n \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}$

(a) $\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle$

$= \langle u,u\rangle + 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle = \|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2$

(b) $\|u-v\|^2 = \langle u-v, u-v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle u,-v\rangle + \langle -v,u\rangle + \langle -v,-v\rangle =$

$= \langle u,u\rangle - 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle = \|u\|^2 - 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2$

(c) $\|au+bv\|^2 = \langle au+bv, au+bv\rangle = \langle au,au\rangle + \langle au,bv\rangle + \langle bv,au\rangle + \langle bv,bv\rangle =$

$= a^2\langle u,u\rangle + 2ab\langle u,v\rangle + b^2\langle v,v\rangle = a^2\|u\|^2 + 2ab\langle u,v\rangle + b^2\|v\|^2$

3. Dimostrare l'*identità di polarizzazione* (come sempre da quantificare) nelle sue varie forme

(a) $$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right),$$

(b) $$\langle u, v\rangle = \frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u-v\|^2\right).$$

$\forall u, v \in \mathbb{R}^n$

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2$$

$$\Rightarrow \langle u,v\rangle = \frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right) \qquad (b.1)$$

$$\|u-v\|^2 = \langle u-v, u-v\rangle = \|u\|^2 - 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2$$

$$\Rightarrow \langle u,v\rangle = \frac{1}{2}\left(\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u-v\|^2\right) \qquad (b.2)$$

$$\Rightarrow \|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = 4\langle u,v\rangle$$

$$\Rightarrow \langle u,v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right) \qquad (a)$$

4. Trovare formule, in termini delle norme dei singoli vettori ed opportuni prodotti scalari, per

(a) $\|u+v-w\|^2$ (b) $\|u+v-2w\|^2$ (c) $\|3u-2v-w\|^2$.

$\forall u, v \in \mathbb{R}^n, \ \forall a, b, c \in \mathbb{R}$

$$\|au + bv + cw\|^2 = \langle au+bv+cw, au+bv+cw\rangle =$$

$$= a^2\|u\|^2 + b^2\|v\|^2 + c^2\|w\|^2 + 2ab\langle u,v\rangle + 2ac\langle u,w\rangle + 2bc\langle v,w\rangle$$

(a) $\|u+v-w\| = \|u\|^2 + \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\langle u,w\rangle - 2\langle u,w\rangle - 2\langle v,w\rangle$

(b) $\|u+v-2w\| = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 4\|w\|^2 + 2\langle u,v\rangle - 4\langle u,w\rangle - 4\langle v,w\rangle$

(c) $\|3u-2v-w\| = 9\|u\|^2 + 4\|v\|^2 + \|w\|^2 - 12\langle u,v\rangle - 6\langle u,w\rangle + 4\langle v,w\rangle$

5. Siano P e Q punti in $\mathbb{R}^n$, pensati come vettori. Determinare, sempre come vettori:

(a) • il punto A del segmento PQ tale che $AP = AQ$,

(b) • il punto B del segmento PQ tale che $BP = 7BQ$,

(c) • il punto C della retta PQ, diverso da B, tale che $CP = 7CQ$,

(d) • il punto D della retta PQ, diverso da ? $\underline{Q}$, tale che $DQ = PQ$.

(a) $A(\delta) = P + \delta(Q-P)$ $\quad 0 \le \delta \le 1$ $\quad \begin{cases} AP = |P-A| = |\delta(Q-P)| = \delta PQ \\ AQ = PQ - AP = (1-\delta)PQ \end{cases}$

$$AP = AQ \Rightarrow \delta PQ = (1-\delta)PQ \Rightarrow 2\delta = 1 \quad \delta = 1/2$$

$$\Rightarrow A = \frac{P+Q}{2}$$

(b) $B(\delta) = P + \delta(Q-P)$ $\quad 0 \le \delta \le 1$ $\quad BP = \delta PQ \quad BQ = (1-\delta)PQ$

$$BP = 7BQ \Rightarrow \delta PQ = 7(1-\delta)PQ \Rightarrow \delta = 7 - 7\delta \Rightarrow \delta = 7/8$$

$$\Rightarrow B = P + \frac{7}{8}Q - \frac{7}{8}P \Rightarrow B = \frac{P+7Q}{8}$$

(c) $r_{PQ}: P + \delta(Q-P)$ $\quad \delta \in \mathbb{R}$ $\quad C(\delta) = P + \delta(Q-P)$ $\quad \delta > 0$ $\quad \begin{cases} CP = |P-C| = \delta PQ \\ CQ = |1-\delta| PQ \end{cases}$

$$CP = 7CQ \Rightarrow \delta = 7|1-\delta| \quad \begin{cases} 0<\delta<1 & \delta = 7-7\delta & \delta = 7/8 \equiv B \\ \delta > 1 & \delta = -7+7\delta & \delta = 7/6 \equiv C \end{cases}$$

$$C = P + \frac{7}{6}(Q-P) = P + \frac{7}{6}Q - \frac{7}{6}P \Rightarrow C = \frac{7Q-P}{6}$$

(d) $D(\delta) = P + \delta(Q-P)$ $\quad \delta > 0$ $\quad DP = \delta PQ \quad DQ = |1-\delta| PQ$

$$\Rightarrow DQ = PQ \Rightarrow |1-\delta| = 1 \Rightarrow \begin{cases} \delta = 0 \equiv P \\ \delta = 2 \equiv D \end{cases}$$

$$\Rightarrow D = 2Q - P$$

6. Siano A, B, C tre punti di $\mathbb{R}^n$ pensati come vettori e vertici di un triangolo. Determinare:

(a) • i vettori corrispondenti ai punti medi dei lati,

(b) • il vettore corrispondente al baricentro,

(c) • le espressioni per le lunghezze dei lati come norme di opportuni vettori,

(d) • le espressioni per le lunghezze delle mediane, prima come norme di opportuni vettori, poi in funzione delle lunghezze dei lati.

(a) $M_{AB} = A + \frac{1}{2}(B-A) = \frac{A+B}{2}$ $\quad M_{AC} = \frac{A+C}{2}$ $\quad M_{BC} = \frac{B+C}{2}$

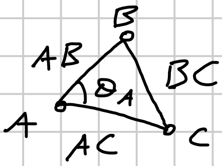
(b) $G = C + \frac{2}{3}(M_{AB} - C) = B + \frac{2}{3}(M_{AC} - B) = A + \frac{2}{3}(M_{BC} - A) = \frac{A+B+C}{3}$

(c) $AB = \|B-A\|$ $\quad AC = \|C-A\|$ $\quad BC = \|C-B\|$

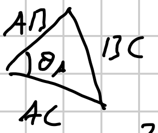
(d) $AM_{BC} = \|M_{BC} - A\|$ $\quad BM_{AC} = \|M_{AC} - B\|$ $\quad CM_{AB} = \|M_{AB} - C\|$

$$M_{BC} - A = \frac{1}{2}(B-A) + \frac{1}{2}(C-A) \Rightarrow AM_{BC} = \frac{1}{2}\|(B-A)+(C-A)\|$$

$$\Rightarrow AM_{BC}^2 = \frac{1}{4}\left(AB^2 + AC^2 + 2\,AB \cdot AC \cdot \cos\theta_A\right)$$



$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AB\,AC\,\cos\theta_A \qquad \cos\theta_A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2\,AB\,AC}$$



$$\Rightarrow AM_{BC}^2 = \frac{1}{4}\left(AB^2 + AC^2 + AB^2 + AC^2 - BC^2\right) = \frac{1}{4}\left(2AB^2 + 2AC^2 - BC^2\right)$$

$$AM_{BC} = \frac{1}{2}\sqrt{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}$$

$$BM_{AC} = \frac{1}{2}\sqrt{2AB^2 + 2BC^2 - AC^2}$$

$$CM_{AB} = \frac{1}{2}\sqrt{2AC^2 + 2BC^2 - AB^2}$$