Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Scritto d'esame di Elementi di Calcolo delle Variazioni

Pisa, 12 Gennaio 2016

Esercizio 1. Studiare il problema di minimo:

$$\min \left\{ \int_0^1 (\dot{u}^2 + u^2 - x^2 u)\ dx \ \middle|\ u(0) = 0 \right\}$$

Soluzione. Proviamo minimizzare il seguente funzionale:

$$F(u) = \int_0^1 (\dot{u}^2 + u^2 - x^2 u)\ dx$$

nello spazio seguente:

$$X = \{u \in C^1([0,1]) \mid u(0) = 0\}$$

Il minimo, se esiste in X, deve soddisfare:

$$\left.\frac{d}{dt} F(u + tv)\right|_{t=0} = 0$$

per ogni $v \in X$ (X è uno spazio vettoriale). Da qui si ottiene, in sostanza, la prima forma integrale di Eulero:

$$\int_0^1 2\dot{u}\dot{v} + 2uv - x^2 v\ dx = 0$$

Supponendo che sia $u \in C^2([0,1])$, integrando per parti si ottiene la seconda forma integrale di Eulero:

$$[2\dot{u}v]_0^1 + \int_0^1 -2\ddot{u}v + 2uv - x^2 v\ dx = 0$$

$$2\dot{u}(1)v(1) + \int_0^1 (-2\ddot{u} + 2u - x^2)v\ dx = 0$$

Restringendosi allora al sottospazio Y di X seguente:

$$Y = \{u \in C^1([0,1]) \mid u(0) = u(1) = 0\}$$

si ha che u, se esiste, è soluzione della seguente equazione differenziale di Eulero:

$$-2\ddot{u} + 2u - x^2 = 0$$

$$-2\ddot{u} + 2u = x^2$$

Proviamo a determinare una soluzione dell'equazione della forma:

$$u_0(x) = ax^2 + b$$

In effetti, se $a = b = 1/2$, u_0 risolve l'equazione differenziale. A tale funzione possiamo sommare una qualsiasi soluzione dell'equazione omogenea associata:

$$-2\ddot{u} + 2u = 0$$

$$\ddot{u} = u$$

Vale allora:

$$u(x) = c_1 \mathrm{e}^x + c_2 \mathrm{e}^{-x}$$

Imponendo allora la condizione di Dirichlet $u(0) = 0$ e la condizione di Neumann $\dot{u}(1) = 0$ (che è stata generata quando è stata effettuata l'integrazione per parti) si possono determinare univocamente i coefficienti c_1, c_2 della soluzione cercata.

Il seguente sistema lineare è infatti risolvibile, perchè la matrice (di Vandermonde) ha determinante non nullo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{e} & -\mathrm{e}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Con un po' di calcoli, si ottengono allora i seguenti coefficienti:

$$c_1 = -\frac{1+2\mathrm{e}}{2+2\mathrm{e}^2}\ ,\ c_2 = -\frac{(\mathrm{e}-2)\mathrm{e}}{2(1+\mathrm{e}^2)}$$

Sia quindi $u = u + u_0$ la soluzione trovata (con abuso di notazione). Data allora $w \in X$, se $v = w - u$ si ha:

$$F(w) \ = \ F(u+v) \ = \ \int_0^1 (\dot{u}^2 + u^2 - x^2 u)\ dx +$$

$$\int_0^1 (\dot{v}^2 + v^2 - x^2 v)\ dx + \int_0^1 (2\dot{u}\dot{v} + 2uv)\ dx \ =$$

$$= \ F(u) + ||v||^2_{H^1([0,1])} \ \geq \ F(u)\ ,$$

da cui si ha che u è minimo globale. Il minimo è inoltre unico, perchè se $||v||^2_{H^1([0,1])} = 0$ allora $v \equiv 0$ quasi ovunque, in realtà ovunque perchè v è continua (l'unicità si poteva anche dimostrare usando le proprietà di convessità di $\psi(x,s,p) = p^2 + s^2 - x^2 s$, per $x \in [0,1]$ fissato).

Il minimo, dunque, è $F(u)$ (omettiamo i conti).