Geometria nel piano 1

Argomenti: Geometria nel piano **Difficoltà**: ⋆⋆⋆

Prerequisiti: Uso dei vettori nel piano, norma, distanza e prodotto scalare in $\mathbb{R}^2$

---

1. Determinare il simmetrico del punto generico (x, y) rispetto ad un punto (x_0, y_0) dato.
2. Determinare la proiezione di un punto (x_0, y_0) su una retta $ax + by + c$ assegnata.

   Dedurne la formula per la distanza di un punto da una retta.
3. Determinare il simmetrico del punto generico (x, y) rispetto ad una retta $ax + by + c$ assegnata.
4. Determinare le equazioni cartesiane delle bisettrici (ma quante sono queste bisettrici?) degli angoli formati dalle rette $2x + 3y = 5$ e $x - y + 2 = 0$.
5. Un triangolo ha i vertici nei punti $(2, 3)$, $(-1, 4)$, $(1, 1)$.

   Determinare le equazioni delle mediane, delle altezze, degli assi e delle bisettrici del triangolo.
6. La retta r_1 passa per il punto $(2, 3)$ e forma con il semiasse positivo delle x un angolo θ tale che $\cos\theta = 3/5$. La retta r_2 passa per il punto $(3, 4)$ e forma con il semiasse positivo delle x lo stesso angolo θ.

   Determinare il luogo dei punti equidistanti da r_1 ed r_2.
7. Consideriamo nel piano cartesiano i punti $A = (3, 1)$ e $B = (4, -4)$.
   - Determinare il luogo dei punti P tali che $PA = PB$.
   - Determinare il luogo dei punti P tali che $PA = 3PB$.
   - Più in generale, determinare al variare del parametro $\lambda > 0$, il luogo dei punti P tali che $PA = \lambda PB$.
8. Dimostrare che la coordinata polare θ di un punto (x, y) del piano può sempre essere calcolata mediante la seguente formula:

$$\theta = \begin{cases} \text{indefinito} & \text{se } x = 0 \text{ e } y = 0 \\ \pi/2 & \text{se } x = 0 \text{ e } y > 0 \\ -\pi/2 & \text{se } x = 0 \text{ e } y > 0 \\ \arctan(y/x) & \text{se } x > 0 \\ \pi + \arctan(y/x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

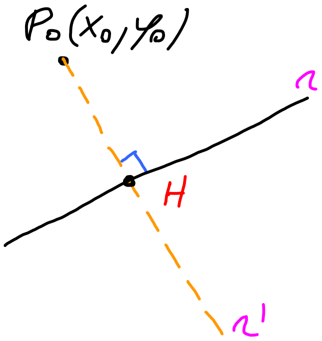
9. Sia Γ la circonferenza con centro in $P_0 = (x_0, y_0)$ e passante per il punto $P_1 = (x_1, y_1)$, diverso da P_0.

   Determinare in forma parametrica ed in forma cartesiana l'equazione della retta tangente a Γ nel punto P_1.

1. Determinare il simmetrico del punto generico (x, y) rispetto ad un punto (x_0, y_0) dato.

$$\begin{cases} x' = 2x_0 - x \\ y' = 2y_0 - y \end{cases}$$

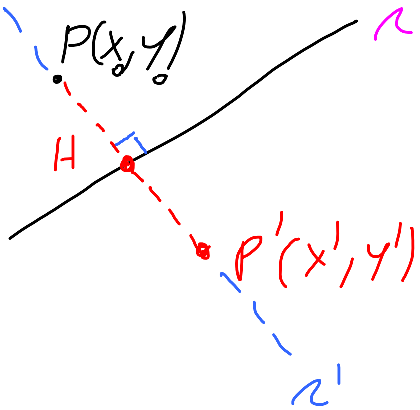
2. Determinare la proiezione di un punto (x_0, y_0) su una retta $ax + by + c$ assegnata.
   Dedurne la formula per la distanza di un punto da una retta.



$$\begin{cases} x_H = \dfrac{b^2x_0 - ab\,y_0 - ac}{a^2+b^2} \\ y_H = \dfrac{-ab\,x_0 + a^2\,y_0 - cb}{a^2+b^2} \end{cases}$$

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

3. Determinare il simmetrico del punto generico (x, y) rispetto ad una retta $ax + by + c$ assegnata.



$$\Rightarrow P' = \left(\frac{(b^2-a^2)x_0 - 2ab\,y_0 - 2ac}{a^2+b^2},\ \frac{-2ab\,x_0 + (a^2-b^2)y_0 - 2bc}{a^2+b^2} \right)$$

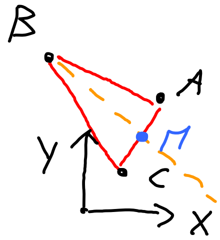
4. Determinare le equazioni cartesiane delle bisettrici (ma quante sono queste bisettrici?) degli angoli formati dalle rette $2x + 3y = 5$ e $x - y + 2 = 0$.

$$r' : (2\sqrt{2} - \sqrt{13})x + (3\sqrt{2} + \sqrt{13})y - (5\sqrt{2} + 2\sqrt{13}) = 0$$

$$r'' : (3\sqrt{2} + \sqrt{13})x - (2\sqrt{2} - \sqrt{13})y + \left(\frac{21}{5}\sqrt{2} - \frac{8}{5}\sqrt{13}\right) = 0$$

5. Un triangolo ha i vertici nei punti $(2,3)$, $(-1,4)$, $(1,1)$.

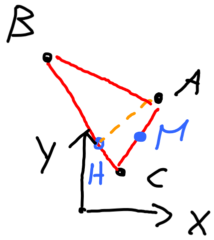
Determinare le equazioni delle mediane, delle altezze, degli assi e delle bisettrici del triangolo.



1) MEDIANA $B \to AC$

$$\Rightarrow (-1,4) + \delta\left(\tfrac{3}{2}, -2\right)$$

2) ALTEZZA $A \to BC$



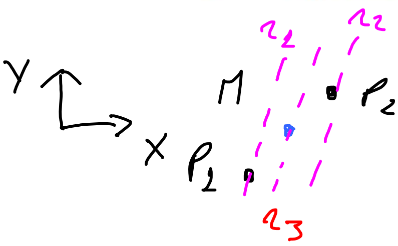
$$\Rightarrow (2,3) + \delta(3,2)$$

3) BISETTRICE $C \to AB$

$$\Rightarrow (1,1) + \delta\left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$$

6. La retta r_1 passa per il punto $(2,3)$ e forma con il semiasse positivo delle x un angolo θ tale che $\cos\theta = 3/5$. La retta r_2 passa per il punto $(3,4)$ e forma con il semiasse positivo delle x lo stesso angolo θ.

Determinare il luogo dei punti equidistanti da r_1 ed r_2.



$$\Rightarrow 5y - 3x - \frac{13}{2} = 0$$

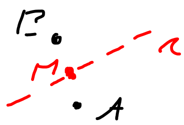
7. Consideriamo nel piano cartesiano i punti $A = (3,1)$ e $B = (4,-4)$.

(a) • Determinare il luogo dei punti P tali che $PA = PB$.

(b) • Determinare il luogo dei punti P tali che $PA = 3PB$.

(c) • Più in generale, determinare al variare del parametro $\lambda > 0$, il luogo dei punti P tali che $PA = \lambda PB$.

(a) $PA = PB \Rightarrow x - 5y - 11 = 0$

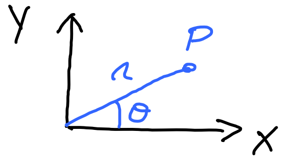


(b) $PA = 3PB \Rightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{13}{2}\right)^2 = \frac{33}{2}$

(c) $PA = \lambda PB \Rightarrow \left[x + \frac{6-8\lambda}{2(\lambda-1)}\right]^2 + \left[y + \frac{2+8\lambda}{2(\lambda-1)}\right]^2 = 26\lambda / (\lambda-1)^2$

8. Dimostrare che la coordinata polare θ di un punto (x, y) del piano può sempre essere calcolata mediante la seguente formula:

$$\theta = \begin{cases} \text{indefinito} & \text{se } x = 0 \text{ e } y = 0 \\ \pi/2 & \text{se } x = 0 \text{ e } y > 0 \\ -\pi/2 & \text{se } x = 0 \text{ e } y > 0 \\ \arctan(y/x) & \text{se } x > 0 \\ \pi + \arctan(y/x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

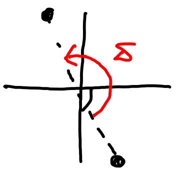


$$r = \sqrt{x^2+y^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = r\cos\theta = 0 \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta = 0 \end{cases} \quad \forall\theta$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta = 0 \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta > 0 \end{cases} \overset{r>0}{\Rightarrow} \begin{cases} \cos\theta = 0 \\ \mathrm{sen}\,\theta > 0 \end{cases} \Rightarrow \theta = \pi/2$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta = 0 \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta < 0 \end{cases} \overset{r>0}{\Rightarrow} \begin{cases} \cos\theta = 0 \\ \mathrm{sen}\,\theta < 0 \end{cases} \Rightarrow \theta = -\pi/2$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta > 0 \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \Rightarrow \theta = \mathrm{arctg}\, y/x$$

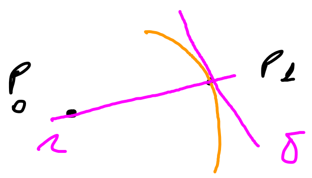


$$\begin{cases} x = r\cos\theta < 0 \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3}{2}\pi \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \Rightarrow \theta = \mathrm{arctg}\, y/x + \pi$$

9. Sia Γ la circonferenza con centro in $P_0 = (x_0, y_0)$ e passante per il punto $P_1 = (x_1, y_1)$, diverso da P_0.

Determinare in forma parametrica ed in forma cartesiana l'equazione della retta tangente a Γ nel punto P_1.

$P_0(x_0, y_0)$ $\quad$ $P_1(x_1, y_1)$



$$\delta: \ (x_1, y_1) + s\left((y_1 - y_0), -(x_1 - x_0)\right)$$

$$(y_1 - y_0)y + (x_1 - x_0)x + x_1(x_0 - x_1) + y_1(y_0 - y_1) = 0$$