BY GIMUSI 08/12/15

Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Prova in itinere di Analisi Matematica 2

Pisa, 30 Novembre 2015

(Problemi da 3 punti)

1. Consideriamo la funzione $f(x,y) = e^{xy}\cos(x+y^2)$. Calcolare $f_{xyxx}(0,0)$.

2. Determinare massimo e minimo della funzione $f(x,y) = x+3y$ sul triangolo con vertici nei punti $(0,1)$, $(1,0)$, $(2,0)$ del piano cartesiano.

3. Sia T il triangolo con vertici nei punti $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,1)$. Calcolare
$$\int_T y^2\,dx\,dy.$$

4. Sia S la sfera con centro in $(0,2,-1)$ e raggio 3. Calcolare
$$\int_S (y+z)^2\,dx\,dy\,dz.$$

(Problemi da 8 punti)

5. Consideriamo l'insieme
$$\Gamma = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+2z^2 = 5,\ y^2+z^2 = 2,\ y\geq 0\}.$$
Determinare estremo inferiore e superiore della funzione $f(x,y,z) = 2y+z^2$ al variare di (x,y,z) in Γ, precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo e massimo. In caso affermativo, determinare anche gli eventuali punti di minimo/massimo.

6. Per ogni $R>0$ poniamo $B_R = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0,\ y\geq 0,\ x^2+y^2\leq R^2\}$ e
$$I_R = \int_{B_R} \frac{x\arctan(y^3)}{(x^2+y^2)^\alpha}\,dx\,dy.$$
   (a) Determinare per quali valori del parametro reale α l'integrale I_R è finito per ogni $R>0$.
   (b) Determinare per quali valori di α si ha che I_R ha limite finito per $R\to+\infty$.

7. (a) Dimostrare che per ogni $R>0$ esiste una costante K tale che
$$\arctan(xy) - x^2 + 3y^4 \leq K(x^2+y^2)^2$$
   per ogni coppia di numeri reali (x,y) tali che $x^2+y^2\geq R^2$.
   (b) Indicata con $K(R)$ la migliore costante per cui vale la disuguaglianza precedente, calcolare i seguenti limiti:
$$\lim_{R\to0^+} K(R), \qquad \lim_{R\to+\infty} K(R).$$
   (c) (Bonus question) Calcolare
$$\lim_{R\to0^+} R^a\cdot K(R)$$
   al variare del parametro reale a.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere adeguatamente giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla correttezza ed alla chiarezza delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

1. Consideriamo la funzione $f(x,y) = e^{xy}\cos(x+y^2)$. Calcolare $f_{xyxx}(0,0)$.

$$\begin{cases} e^{xy} = 1 + xy + \dfrac{x^2y^2}{2} + o((xy)^2) \\ \cos(x+y^2) = 1 - \dfrac{(x+y^2)^2}{2} + \dfrac{(x+y^2)^4}{4!} + o((x+y^2)^4) \end{cases}$$

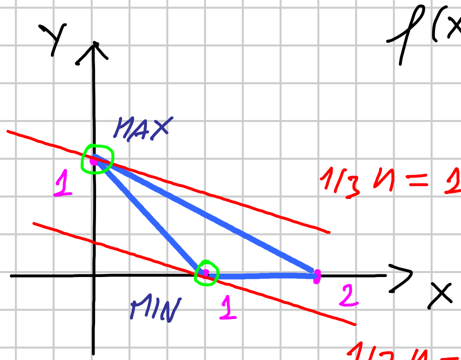
$$\begin{cases} e^{xy} = 1 + xy + \dfrac{x^2y^2}{2} + o((x^2+y^2)^2) \\ \cos(x+y^2) = 1 - \dfrac{x^2}{2} - xy^2 - \dfrac{y^4}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o((x^2+y^2)^2) \end{cases}$$

$$e^{xy}\cos(x+y^2) = 1 - \frac{x^2}{2} + xy - xy^2 - \frac{1}{2}x^3y + \dots$$

$$\rightsquigarrow f_{xyxx}(0,0) = -1/2$$

2. Determinare massimo e minimo della funzione $f(x,y) = x + 3y$ sul triangolo con vertici nei punti $(0,1)$, $(1,0)$, $(2,0)$ del piano cartesiano.

$$f(x,y) = x + 3y = k \qquad y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}k$$



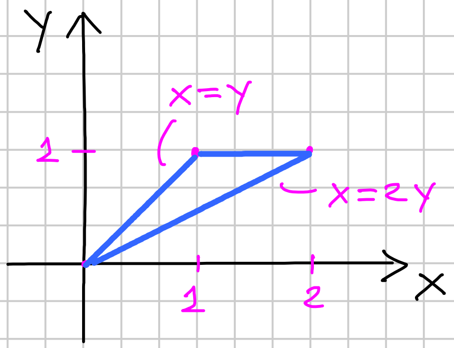
$1/3\,k = 1 \rightsquigarrow k = 3$

$1/3\,k = 1/3 \rightsquigarrow k = 1$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} MAX & f(0,1) = 3 \\ MIN & f(1,0) = 1 \end{cases}$$

3. Sia T il triangolo con vertici nei punti $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,1)$. Calcolare

$$\int_T y^2\,dx\,dy.$$



$$\int_T y^2\,dx\,dy = \int_0^1 \int_y^{2y} y^2\,dx\,dy = \int_0^1 y^3\,dy = \left[y^4/4\right]_0^1 = 1/4$$

4. Sia S la sfera con centro in $(0,2,-1)$ e raggio 3. Calcolare

$$\int_S (y+z)^2\,dx\,dy\,dz.$$

$$\begin{cases} u = x \\ v = y-2 \\ w = z+1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = u \\ y = v+2 \\ z = w-1 \end{cases}$$

$J(u,v,w) = 1$ (TRASLAZIONE)

$\hat{S} \equiv$ SFERA CON $R=3$ E $\hat{C}$ IN $(0,0,0)$

$$\int_S (y+z)^2\,dx\,dy\,dz = \int_{\hat{S}} (v+2+w-1)\,du\,dv\,dw =$$

$$= \underbrace{\cancel{\int_{\hat{S}} (v+w)\,du\,dv\,dw}}_{\text{x SIMMETRIA}}^{=0} + \int_{\hat{S}} du\,dv\,dw = \frac{4}{3}\pi(3)^3 = 36\pi$$

5. Consideriamo l'insieme

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2z^2 = 5,\ y^2 + z^2 = 2,\ y \geq 0\}.$$

Determinare estremo inferiore e superiore della funzione $f(x, y, z) = 2y + z^2$ al variare di (x, y, z) in Γ, precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo e massimo. In caso affermativo, determinare anche gli eventuali punti di minimo/massimo.

Γ É COMPATTO:

$$\begin{cases} x^2+2z^2=5 & \rightsquigarrow x \text{ E } z \text{ LIMITATI} \\ y^2+z^2=2 & \rightsquigarrow \text{ANCHE } y \text{ LIMITATO} \end{cases}$$

$\rightsquigarrow \Gamma$ É LIMITATO XCHÉ CONTENUTO IN UNA SFERA DI RAGGIO 3

$\rightsquigarrow \Gamma$ É CHIUSO XCHÉ INTERSEZIONE DI CHIUSI

$f(x,y,z) = 2y+z^2$ É CONTINUA

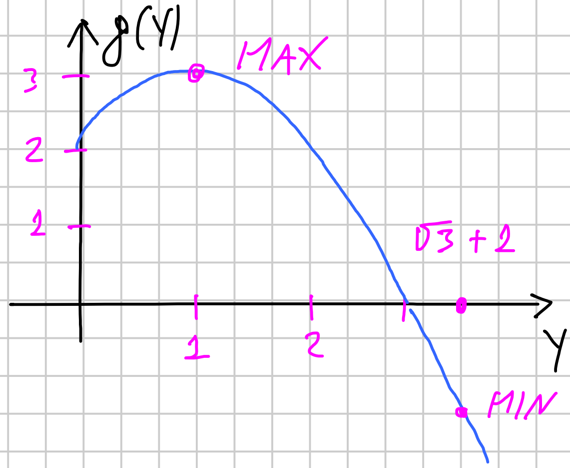
$\rightsquigarrow$ X WEIERSTRASS f AMMETTE MAX E MIN IN Γ

METODO DI SOSTITUZIONE

$$\begin{cases} f(x,y,z) = 2y+z^2 \\ y^2+z^2=2 \end{cases} \rightsquigarrow f(x,y,z) = g(y) = -y^2+2y+2$$

$$g(y) = 3-(y-1)^2 = (\sqrt{3}+1-y)(\sqrt{3}-1+y)$$

$$g'(y) = -2y+2 = 0 \quad y = 1$$



MAX: $f(x,1,z)=g(1)=3$

$$\begin{cases} x^2+2z^2=5 \\ y^2+z^2=2 \\ y=1\geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=\pm\sqrt{3} \\ z=\pm 1 \\ y=1 \end{cases}$$

MIN: SI HA PER y_{MAX}

$$\begin{cases} x^2+2z^2=5 \\ y^2+z^2=2 \\ y\geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=\pm\sqrt{5} \\ y=\sqrt{2} \\ z=0 \end{cases} \qquad f(\pm\sqrt{5},\sqrt{2},0)=2\sqrt{2}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} SUP(f)=MAX(f)=3 \quad IN \quad P_{1\div 4}(\pm\sqrt{3},1,\pm 1) \\ INF(f)=MIN(f)=2\sqrt{2} \quad IN \quad P_{5\div 6}(\pm\sqrt{5},\sqrt{2},0) \end{cases}$$

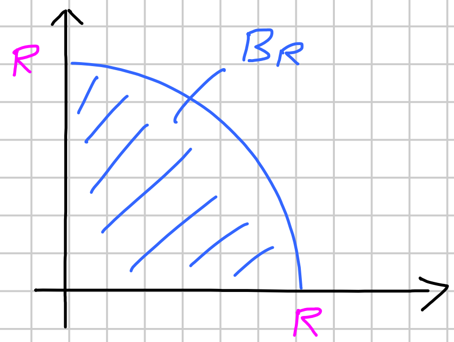
6. Per ogni $R > 0$ poniamo $B_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq R^2\}$ e

$$I_R = \int_{B_R} \frac{x \arctan(y^3)}{(x^2 + y^2)^\alpha}\, dx\, dy.$$

(a) Determinare per quali valori del parametro reale α l'integrale I_R è finito per ogni $R > 0$.

(b) Determinare per quali valori di α si ha che I_R ha limite finito per $R \to +\infty$.

$$I_R = \int_{B_R} \frac{x \operatorname{ARCTAN}(y^3)}{(x^2+y^2)^\alpha}\, dx\, dy$$



(a) $\left[\text{B.M.} \quad f(x,y) \sim \frac{x y^3}{(x^2+y^2)^\alpha} \sim \frac{\rho^5}{\rho^{2\alpha}} = \frac{1}{\rho^{2\alpha-5}} \rightsquigarrow \alpha < 3 \right]$

DISEG. DALL'ALTO $\forall R > 0$ $\quad \operatorname{ARCTAN}(y^3) \leq y^3$

$$f(x,y) \leq \frac{x y^3}{(x^2+y^2)^\alpha}$$

$$I_R \leq \int_{B_R} \frac{x y^3}{(x^2+y^2)^\alpha}\, dx\, dy = \int_0^{\pi/2}\int_0^R \frac{\rho^5 \sin\theta \cos^3\theta}{\rho^{2\alpha}}\, d\rho\, d\theta \leq$$

$$\leq \frac{\pi}{2} \int_0^R \frac{1}{\rho^{2\alpha-5}}\, d\rho \quad \text{CONVERGE PER } 2\alpha - 5 < 1$$

$$\alpha < 3$$

DISEG. DAL BASSO $\forall R > 0\ \exists m > 0 : \operatorname{ARCTAN}(y^3) \geq m y^3$

$$I_R \geq \int_{B_R} \frac{m x y^3}{(x^2+y^2)^\alpha}\, dx\, dy = m \int_0^{\pi/2}\int_0^R \frac{\rho^5 \sin\theta \cos^3\theta}{\rho^{2\alpha}}\, d\rho\, d\theta \geq$$

$\theta \in [0, \pi/2] \qquad 0 < c \leq \sin\theta \cos^3\theta$

$$\geq m c \frac{\pi}{2} \int_0^R \frac{1}{\rho^{2\alpha-5}} \, d\rho \qquad \text{DIVERGE PER } 2\alpha - 5 \geq 1$$

$$\alpha \geq 3$$

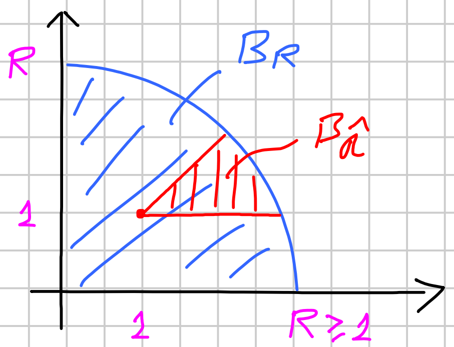
$$\rightsquigarrow \quad I_R \begin{cases} \text{CONVERGE PER } \alpha < 3 \\ \text{DIVERGE PER } \alpha \geq 3 \end{cases}$$

(b) $$I_R \leq \frac{\pi}{2} \int_{B_R} \frac{x}{(x^2+y^2)^\alpha} \, dx\,dy = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} \int_0^R \frac{\rho^2 \cos\theta}{\rho^{2\alpha}} \, d\rho\, d\theta \leq$$

$$\leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \int_0^R \frac{1}{\rho^{2\alpha-2}} \, d\rho \qquad R \to +\infty \; I_R \text{ CONVERGE PER}$$

$$2\alpha - 2 > 1, \; \alpha < 3 \rightsquigarrow \frac{3}{2} < \alpha < 3$$

$$I_R \geq \int_{\hat{B}_R} \frac{x \arctan(y^3)}{(x^2+y^2)^\alpha} \, dx\,dy \geq$$



$$\geq \arctan(1) \int_0^{\pi/4} \int_1^R \frac{\rho^2 \cos\theta}{\rho^{2\alpha}} \, d\rho\, d\theta \geq$$

$$\geq \arctan(1) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \int_1^R \frac{1}{\rho^{2\alpha-2}} \, d\rho \qquad R \to +\infty \; I_R \text{ DIVERGE PER}$$

$$2\alpha - 2 \leq 1 \quad \alpha \leq 3/2$$

$$\rightsquigarrow \quad R \to +\infty \quad I_R \text{ CONVERGE PER } \frac{3}{2} < \alpha < 3$$

7. (a) Dimostrare che per ogni $R > 0$ esiste una costante K tale che

$$\arctan(xy) - x^2 + 3y^4 \leq K(x^2 + y^2)^2$$

per ogni coppia di numeri reali (x, y) tali che $x^2 + y^2 \geq R^2$.

(b) Indicata con $K(R)$ la migliore costante per cui vale la disuguaglianza precedente, calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{R\to 0^+} K(R), \qquad \lim_{R\to +\infty} K(R).$$

(c) (Bonus question) Calcolare

$$\lim_{R\to 0^+} R^a \cdot K(R)$$

al variare del parametro reale a.

(a) $\forall R > 0 \ \exists K \quad \text{ARCTAN}(XY) - X^2 + 3Y^4 \leq K(X^2+Y^2)^2 \quad (*)$

$\forall (X,Y)$ T.C. $X^2 + Y^2 \geq R^2$

$$\Leftrightarrow K \geq f(x,y) = \frac{\text{ARCTAN}(XY) - X^2 + 3Y^4}{(X^2+Y^2)^2}$$

$$f(x,y) \leq \frac{\text{ARCTAN}(XY) + 3Y^4}{(X^2+Y^2)^2} \leq \frac{\pi/2 + 3Y^4}{(X^2+Y^2)^2} \leq$$

$$\leq \frac{\pi/2 + 3\rho^4 \sin^4\theta}{\rho^4} \leq \frac{\pi/2 + 3\rho^4}{\rho^4} = \frac{\pi}{2\rho^4} + 3 \leq \frac{\pi}{2R^4} + 3$$

$\rightsquigarrow \forall R > 0 \ f(x,y)$ È SUP. LIMITATA $\Rightarrow \exists K \geq \text{SUP}(f)$

(b) $\underline{R \to 0^+}$

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2}\to 0^+} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2 \cos\theta \sin\theta - \rho^2\cos^2\theta + 3\rho^4 \sin^4\theta}{\rho^4} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{1}{\rho^2}(\cos\theta\sin\theta - \cos^2\theta) + 3\sin^4\theta$$

PER $\cos\theta(\sin\theta - \cos\theta) > 0 \quad f(x,y) \to +\infty$

$\rightsquigarrow \text{SUP}(f) \to +\infty \quad \Rightarrow \lim_{R\to 0^+} K(R) = +\infty$

2/9

$R \to +\infty$

$$f(x,y) \leq \frac{\pi}{2R^4} + 3 \to 3 \quad (\text{VOL. P.TO "a"})$$

$$\lim_{\substack{\sqrt{x^2+y^2}\to+\infty \\ x=0}} f(x,y) = \lim_{\substack{\sqrt{x^2+y^2}\to+\infty \\ x=0}} \frac{\cancel{\arctan(xy)} - \cancel{x^2} + 3y^4}{(\cancel{x^2}+y^2)^2} = 3$$

$$\rightsquigarrow \sup(f) \to 3 \Rightarrow \lim_{R\to+\infty} u(R) = 3$$

(c) PER $R \to 0^+$ $\quad u(R) \sim \frac{1}{R^2}$ $\quad$ (VOL. P.TO "b")

$$\Rightarrow \lim_{R\to 0^+} R^{a} u(R) = \begin{cases} 0 & \text{PER } a > 2 \\ L & \text{PER } a = 2 \\ +\infty & \text{PER } a < 2 \end{cases}$$

$$L = \max\left(g(\theta) = \cos\theta \sin\theta - \cos^2\theta \right)$$