Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica

Prova in Itinere di Analisi Matematica II

Pisa, ?? ?? ????

1. Sia $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 1\}$. Calcolare
$$\int_A y\,dx\,dy, \qquad \int_A x\,dx\,dy.$$

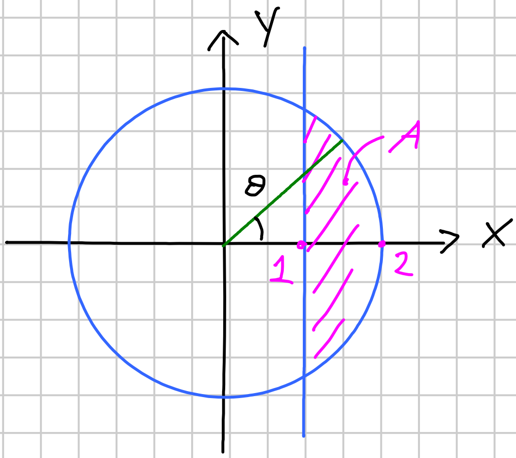
2. Sia V il solido di rotazione ottenuto ruotando di 2π intorno all'asse delle x il domino D del piano xz definito da
$$D := \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : (x,z) \in [0,2] \times [0,2],\ x + z \geq 1\}.$$
Calcolare il volume di V e le coordinate del suo baricentro.

3. Sia γ la curva del piano xy definita da $\gamma(t) = (t^2, t(1-t))$ con $t \in [-2,2]$.
   - (a) Determinare la retta tangente alla curva nel punto corrispondente a $t = 1$ sia in forma parametrica che in forma cartesiana.
   - (b) Stabilire se la curva è chiusa, semplice e tracciarne un grafico approssimativo (specificando il verso di percorrenza della curva).

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato. Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

1. Sia $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 1\}$. Calcolare

$$\int_A y\,dx\,dy, \qquad \int_A x\,dx\,dy.$$



$$\int_A y\,dx\,dy = 0 \quad (\text{PER SIMMETRIA})$$

$$\int_A x\,dx\,dy = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \int_{1/\cos\theta}^{2} \rho^2 \cos\theta \, d\rho\, d\theta =$$

$$= 2 \int_0^{\pi/3} \cos\theta \int_{1/\cos\theta}^{2} \rho^2\, d\rho = 2 \int_0^{\pi/3} \cos\theta \left[\rho^3/3\right]_{1/\cos\theta}^{2} d\theta =$$

$$= 2 \int_0^{\pi/3} \cos\theta \left(8/3 - 1/(3\cos^3\theta)\right) d\theta =$$

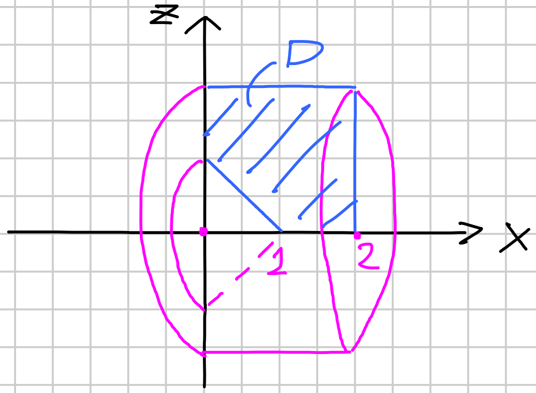
$$= \frac{2}{3} \int_0^{\pi/3} \left(8\cos\theta - \frac{1}{\cos^2\theta}\right) d\theta = \frac{2}{3}\left[8\sin\theta - \tan\theta\right]_0^{\pi/3} =$$

$$= \frac{2}{3}\left(8\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3}$$

2. Sia V il solido di rotazione ottenuto ruotando di 2π intorno all'asse delle x il domino D del piano xz definito da

$$D := \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : (x,z) \in [0,2] \times [0,2],\ x + z \geq 1\}.$$

Calcolare il volume di V e le coordinate del suo baricentro.



$$\begin{cases} \text{AREA}(D) = 2 \cdot 2 - \frac{1}{2} = 7/2 \\ \text{BARICENTRO}(D): \left(\frac{23}{21}, \frac{23}{21}\right) \end{cases}$$

$$X_{G,D} = Z_{G,D} = \left(4 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\right)\frac{2}{7} = \frac{23}{21}$$

VOLUME V

1° MODO "TEOREMA DI GULDINO"

$$V = 2\pi \cdot \text{AREA}(D) \cdot Z_{G,D} = \frac{23}{3}\pi$$

2° MODO "GEOMETRICO"

$$V = \underbrace{\pi r^2 \cdot H}_{\text{CILINDRO}} - \underbrace{\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h}_{\text{CONO INTERNO}} = 8\pi - \frac{1}{3}\pi = \frac{23}{3}\pi$$

3° MODO "CON INTEGRALE"

$$V = \int_0^1 \pi\left(4 - (1-x)^2\right) dx + \int_1^2 \pi \cdot 4 \, dx =$$

$$= \pi \int_0^1 \left(-x^2 + 2x + 3\right) dx + 4\pi =$$

$$= \pi \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right]_0^1 + 4\pi = \pi\left(-\frac{1}{3} + 1 + 3\right) + 4\pi =$$

$$= \pi\left(\frac{11}{3} + 4\right) = \frac{23}{3}\pi$$

X SIMMETRIA

BARICENTRO DI V : $(X_{G,V}, 0, 0)$

1° MODO "CON INTEGRALE"

$$X_{G,V} \cdot V = \int_0^1 \pi (4-(1-x)^2) x \, dx + \int_1^2 \pi \cdot 4 \cdot x \, dx =$$

$$= \pi \int_0^1 (-x^3 + 2x^2 + 3x) \, dx + 4\pi \int_1^2 x \, dx =$$

$$= \pi \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^1 + 4\pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 =$$

$$= \pi \left(-\frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{3}{2} \right) + 4\pi \left(2 - \frac{1}{2} \right) = \pi \frac{-3+8+18}{12} + 4\pi \frac{3}{2} =$$

$$= \pi \left(\frac{23}{12} + 6 \right) = \frac{95}{12}\pi$$

$$X_{G,V} = \frac{95 \cancel{\pi}}{\cancel{12}_{4}} \cdot \frac{\cancel{3}}{23 \cancel{\pi}} = \frac{95}{92}$$

2° MODO "GEOMETRICO"

CILINDRO CONO INTERNO

$$X_{G,V} \cdot V = \pi r^2 \cdot H \cdot \frac{H}{2} - \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h \cdot \frac{h}{4} =$$

$$= 8\pi - \frac{\pi}{12} = \frac{95}{12}\pi \rightsquigarrow X_{G,V}$$

3. Sia γ la curva del piano xy definita da $\gamma(t) = (t^2, t(1-t))$ con $t \in [-2, 2]$.

(a) Determinare la retta tangente alla curva nel punto corrispondente a $t = 1$ sia in forma parametrica che in forma cartesiana.

(b) Stabilire se la curva è chiusa, semplice e tracciarne un grafico approssimativo (specificando il verso di percorrenza della curva).

(a) $\gamma'(\sigma) = (2\sigma, 1-2\sigma) \qquad \gamma'(1) = (2, -1)$

$\gamma(1) = (1, 0)$

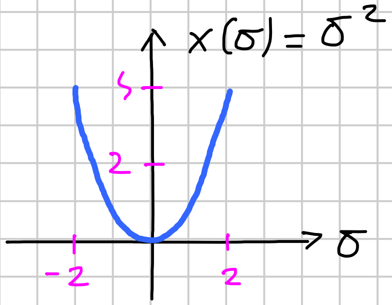
$r(s) = \gamma(1) + \gamma'(1)\cdot s = (1,0) + s(2,-1) = (1+2s, -s)$

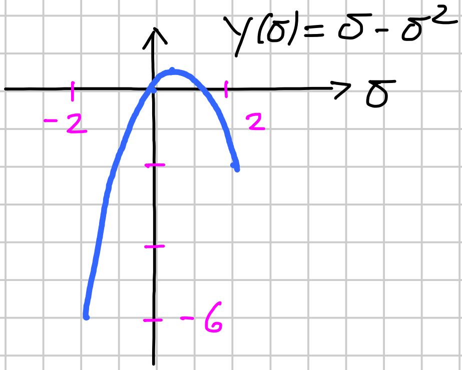
$r: \begin{cases} x = 1+2s \\ y = -s \end{cases} \rightsquigarrow x = 1 - 2y \qquad y = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$

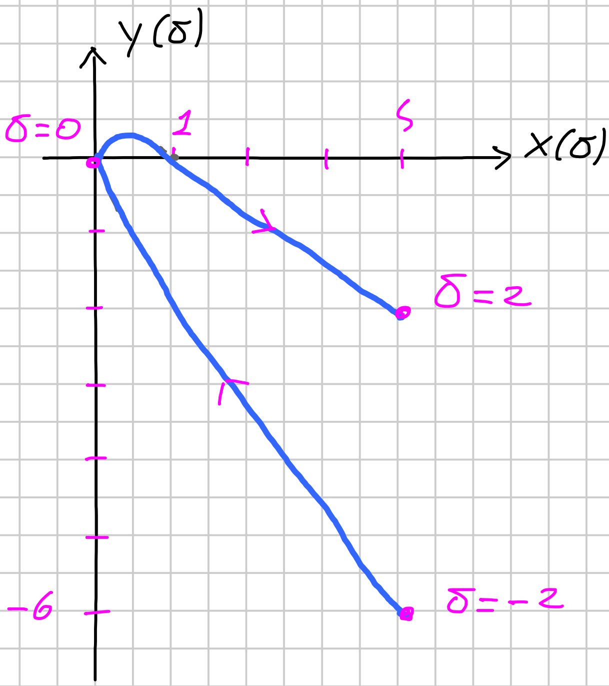
(b) $\gamma(-2) = (5, -6) \neq \gamma(2) = (5, -2)$ γ NON È CHIUSA

$\begin{cases} \gamma(\sigma) = \gamma(s) \\ s \neq \sigma \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma^2 = s^2 \\ \sigma(1-\sigma) = s(1-s) \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma^2 = s^2 \\ \sigma - \sigma^2 = s - s^2 \end{cases}$

$\begin{cases} \sigma = -s \\ -s - s^2 = s - s^2 \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma = 0 \\ s = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \gamma$ È SEMPLICE







5/5