BY GIMUSI 20/10/2015

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica

Prova in Itinere di Analisi Matematica II

Pisa, ?? ?? ????

1. Siano $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le y \le 2x\}$ e $f(x,y) = x^6y^2 + y^4 - 2x^3y^2$.

   Stabilire se esistono

$$\lim_{x^2+y^2\to+\infty,\,(x,y)\in A} f(x,y), \qquad \lim_{x^2+y^2\to+\infty} f(x,y).$$

2. Siano $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 4\}$ e $f(x,y) = |x+y-1|$.

   Determinare estremo inferiore e superiore di f in D specificando se si tratta di minimo e/o massimo e gli eventuali punti di minimo/massimo.

3. Siano $C := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 25,\ x+y = 1\}$ e $f(x,y,z) = x - y + z^2$.

   Determinare estremo inferiore e superiore di f su C specificando se si tratta di minimo e/o massimo e gli eventuali punti di minimo/massimo.

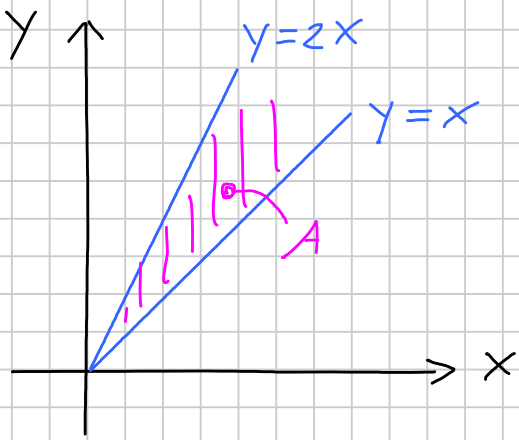
Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato. Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

1. Siano $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y \leq 2x\}$ e $f(x, y) = x^6y^2 + y^4 - 2x^3y^2$.

Stabilire se esistono

$$(i) \lim_{x^2+y^2\to+\infty,\ (x,y)\in A} f(x, y), \quad (ii) \lim_{x^2+y^2\to+\infty} f(x, y).$$

$$(i) \lim_{\substack{x^2+y^2\to+\infty \\ (x,y)\in A}} x^6y^2+y^4-2x^3y^2 = +\infty$$



$$x^6y^2+y^4-2x^3y^2 \geq x^6\cdot \overset{\text{MIN.}}{x^2}+\overset{\text{MIN.}}{x^4}-2x^3\overset{\text{MAX}}{(2x)^2} =$$

$$= x^8+x^4-8x^7 \longrightarrow +\infty$$

$$(ii) \lim_{x^2+y^2\to+\infty} x^6y^2+y^4-2x^3y^2 = N.E.$$

$$\lim_{\substack{x^2+y^2\to+\infty \\ y=0}} x^6y^2+y^4-2x^3y^2 = 0$$

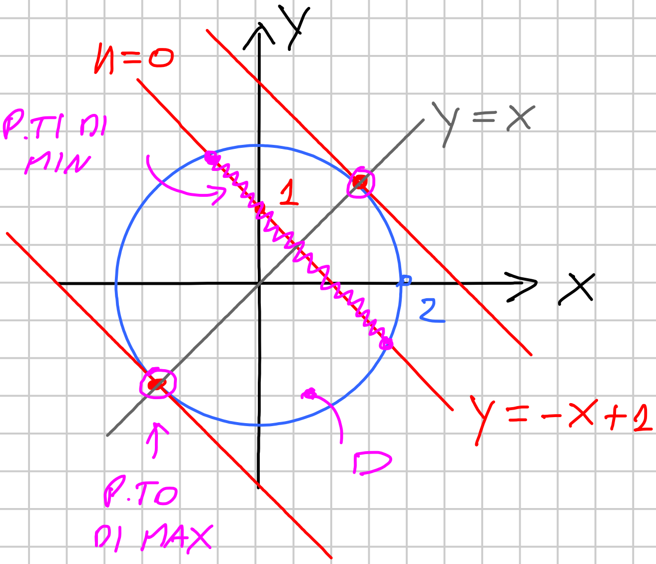
2. Siano $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$ e $f(x,y) = |x+y-1|$.

Determinare estremo inferiore e superiore di f in D specificando se si tratta di minimo e/o massimo e gli eventuali punti di minimo/massimo.

$$\begin{cases} D \text{ È COMPATTO } \wedge f \text{ È CONTINUA} \\ \Rightarrow \text{X WEIERSTRASS } f \text{ AMMETTE MAX E MINIMO} \end{cases}$$

STUDIO MEDIANTE LINEE DI LIVELLO

$$|x+y-1| = u \Rightarrow \begin{cases} y = -x+u+1 & y \geq -x+1 \\ y = -x-u+1 & y < -x+1 \end{cases}$$



P.TO DI MAX $\quad \partial D \cap y = x$

$\Rightarrow x^2 + x^2 = 4 \quad x = \pm\sqrt{2}$

$MAX(f) = |-2\sqrt{2} - 1| = 2\sqrt{2} + 1$

$$\begin{cases} INF(f) = MIN(f) = 0 & P_{MIN}(x, -x+1) \\ SUP(f) = MAX(f) = 2\sqrt{2}+1 & P_{MAX}(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \end{cases}$$

3. Siano $C := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 25,\ x+y=1\}$ e $f(x,y,z) = x - y + z^2$.

Determinare estremo inferiore e superiore di f su C specificando se si tratta di minimo e/o massimo e gli eventuali punti di minimo/massimo.

$$\begin{cases} C \text{ È COMPATTO } \wedge f \text{ È CONTINUA} \\ \Rightarrow \text{X WEIERSTRASS } f \text{ AMMETTE MAX E MINIMO} \end{cases}$$

METODO DEI MOLT. DI LAGRANGE

$$\text{VINCOLI} \begin{cases} \phi_1(x,y,z) = 25 - x^2 - y^2 - z^2 \\ \phi_2(x,y,z) = 1 - x - y \end{cases}$$

1° SISTEMA $\nabla\phi_1$ E $\nabla\phi_2$ LIN. DIPENDENTI

$$\begin{cases} \nabla\phi_1 = (-2x, -2y, -2z) \\ \nabla\phi_2 = (-1, -1, 0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{RANGO}\begin{pmatrix} -2x & -2y & -2z \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \\ \phi_1 = 0 \\ \phi_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -2z = 0 \\ -2z = 0 \\ 25 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \\ 1 - x - y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y \\ z = 0 \\ 25 - 2x^2 = 0 \\ 1 - 2x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y = 1/2 \\ z = 0 \\ x = \pm\sqrt{25/2} \end{cases} \qquad \text{IMPOSSIBILE}$$

$2°$ SISTEMA

$$\nabla f = \lambda \nabla \phi_1 + \mu \nabla \phi_2$$

$$\nabla f = (1, -1, 2z)$$

$$\begin{cases} 1 = -2\lambda x - \mu \\ -1 = -2\lambda y - \mu \\ 2z = -2\lambda z \\ 25 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \\ 1 - x - y = 0 \end{cases}$$

$$2z = -2\lambda z \rightsquigarrow 2z(\lambda+1) = 0 \begin{cases} \lambda = -1 \\ z = 0 \end{cases}$$

$\lambda = -1$

$$\begin{cases} 1 = -2\lambda x - \mu \\ -1 = -2\lambda y - \mu \\ 25 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \\ 1 - x - y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 = 2x - \mu \\ -1 = 2y - \mu \\ 25 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \\ 1 - x - y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 = 2(x-y) \\ -1 = 2y - \mu \\ 25 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \\ 1 - x - y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ 1 - x - y = 0 \\ -1 = 2y - \mu \\ 25 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \\ \mu = 1 \\ z = \pm\sqrt{25} \end{cases}$$

$$P_{1,2}(1, 0, \pm\sqrt{24})$$

$\underline{\underline{z = 0}}$

$$\begin{cases} 1 = -2\lambda x - \mu \\ -1 = -2\lambda y - \mu \\ 25 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \\ 1 - x - y = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = -x + 1 \end{cases} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow x^2 + (-x+1)^2 - 25 = 0 \qquad 2x^2 - 2x - 24 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2} \quad \begin{cases} x = 4 \rightsquigarrow y = -3 \\ x = -3 \rightsquigarrow y = +4 \end{cases}$$

$$P_3(4, -3, 0) \qquad P_4(-3, 4, 0)$$

$$\begin{cases} f(P_1) = f(P_2) = 25 \\ f(P_3) = 4 - (-3) = 7 \\ f(P_4) = -3 - (+4) = -7 \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} INF(f) = MIN(f) = -7 & P_{MIN} = P_4(-3, 4, 0) \\ SUP(f) = MAX(f) = 25 & P_{MAX} = P_{1,2}(1, 0, \pm\sqrt{24}) \end{cases}$$