Basi e componenti

Argomenti: componenti di un vettore rispetto ad una base **Difficoltà:** ⋆⋆

Prerequisiti: dipendenza ed indipendenza lineare, basi, sistemi lineari

---

Nella seguente tabella vengono assegnati uno spazio vettoriale ed una base dello stesso (non sarebbe male fare la verifica che si tratti effettivamente di una base). Si richiede di determinare le componenti di 2 vettori assegnati rispetto a tale base.

	Spazio	Base		Vettore 1	Componenti	Vettore 2	Componenti
1)	$\mathbb{R}^2$	$e_1 = (1,1)$ $e_2 = (2,1)$	sí	$(3,-4)$	$(-11,7)$	$(5,3)$	$(1,2)$
2)	$\mathbb{R}^2$	$e_1 = (1,1)$ $e_2 = (2,1)$	sí	$(2,1)$	$(0,1)$	$(-3,-3)$	$(-3,0)$
3)	$\mathbb{R}^2$	$e_1 = (3,1)$ $e_2 = (5,2)$	sí	$(0,-1)$	$(5,-3)$	$(2,-1)$	$(9,-5)$
4)	$\mathbb{R}^3$	$e_1 = (1,1,5)$ $e_2 = (1,2,4)$ $e_3 = (3,-2,20)$	NO	$(1,-1,1)$	—	$(1,0,0)$	—
5)	$\mathbb{R}^3$	$e_1 = (3,1,2)$ $e_2 = (4,-1,3)$ $e_3 = (-1,-18,2)$	sí	$(0,-2,1)$	$(51,\underline{-37},5)$	$(1,0,1)$	$(21,-15,2)$
6)	$\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$	$e_1 = x^2+1$ $e_2 = x-2$ $e_3 = x+3$	sí	x	$(0,\frac{3}{5},\frac{2}{5})$	x^2-3x+2	$(1,-2,-1)$
7)	$\mathbb{R}^4$	$e_1 = (1,0,2,1)$ $e_2 = (2,1,-1,0)$ $e_3 = (-1,0,1,0)$ $e_4 = (2,0,0,1)$	sí	$(0,0,3,1)$	$(1,0,1,0)$	$(1,1,1,0)$	$(\frac{1}{3},1,\frac{2}{3},\frac{-1}{3})$
8)	$\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$	$e_1 = x-2$ $e_2 = x^2-2$ $e_3 = x^3-2$ $e_4 = x$	sí	$(x+1)^3$	$(-\frac{3}{2},3,1,\frac{13}{2})$	x^3-3x+4	$(1,0,-3,0)$

Consideriamo, nello spazio vettoriale $M_{2\times 2}$, la seguente base:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{sí}$$

Determinare, rispetto a questa base, le componenti dei seguenti "vettori":

$$(0,\tfrac{-1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad v_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}. \quad (1,5,-3,0)$$

$(1,2,-1,-1)$ $(0,-1,0,1)$