

Sottospazi vettoriali 1

Argomenti: spazi e relativi sottospazi vettoriali

Difficoltà: ★★★

Prerequisiti: definizione di sottospazio vettoriale

Nei punti successivi sono dati uno spazio vettoriale V ed alcune relazioni (o insiemi di relazioni) che coinvolgono gli elementi di V . Determinare, per ciascuna delle relazioni (o insiemi di relazioni) date, se definiscono o meno un sottospazio vettoriale di V . In caso affermativo, non sarebbe male determinare la dimensione ed una base del sottospazio.

(Si intende che per le relazioni che definiscono un sottospazio occorre fare una dimostrazione, per quelle che non definiscono un sottospazio occorre specificare quali richieste della definizione di sottospazio vengono a mancare)

1. Spazio vettoriale: \mathbb{R}^2 con elemento generico (x, y) . Relazioni da esaminare:

$$\begin{array}{cccccc}
 \cancel{x+y=3}, & 2x+3y=0, & \cancel{x \leq 0}, & \cancel{x^2+y^2=1}, & \cancel{xy \geq 0}, \\
 & \text{DIM}=1 & & & \\
 \boxed{\begin{array}{l} \cancel{x \geq 0} \\ \cancel{y \geq 0} \end{array}}, & x=y, & x=0, & \cancel{x^2+y^2 \geq 1}, & \cancel{x^2+y^2 \leq 1}. \\
 & \text{DIM}=1 & \text{DIM}=1 & &
 \end{array}$$

2. Spazio vettoriale: \mathbb{R}^3 con elemento generico (x, y, z) . Relazioni da esaminare:

$$\begin{array}{cccccc}
 \text{DIM}=2 & & & \text{DIM}=2 & \text{DIM}=1 \\
 x+y+z=0, & \cancel{x+y+z=1}, & x+y+z=2x+3y+4z, & x=y=z, \\
 \text{DIM}=2 & \text{DIM}=1 & \text{DIM}=0 & & \\
 x^2=0, & \cancel{x^2+y^2=0}, & x^2+y^2+z^2=0, & \cancel{x^2=y^2}, & x^3=0, \text{ DIM}=2 \\
 \text{DIM}=1 & \boxed{\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ 2x+3y+4z=0 \end{array}}, & \boxed{\begin{array}{l} x+y=z \\ y+z=x \end{array}}, & \boxed{\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}}, & \boxed{\begin{array}{l} \cancel{x+y=1} \\ \cancel{y+z=0} \end{array}}.
 \end{array}$$

3. Spazio vettoriale: \mathbb{R}^4 con elemento generico (x, y, z, w) . Relazioni da esaminare:

$$\begin{array}{cccccc}
 \text{DIM}=3 & \text{DIM}=3 & \text{DIM}=3 & & \\
 x+y=0, & x+y=z+w, & x+y+z+w=0, & \cancel{x+y-z+y+z}, \\
 \text{DIM}=3 & \cancel{x^2=0}, & \cancel{y=x^2}, & \cancel{z \geq w}, & \cancel{x^2+y^2+w^2 \geq 0}, & \cancel{x+y^2+z^3=2}, \\
 \text{DIM}=2 & \boxed{\begin{array}{l} x+y=z+w \\ x+z=y+w \end{array}}, & \boxed{\begin{array}{l} x=y \\ z=w \end{array}}, & \boxed{\begin{array}{l} x+2y=3z+4w \\ y+2z=3w+4x \\ z+2w=3x+4y \end{array}}, & \boxed{\begin{array}{l} \cancel{x+y=0} \\ \cancel{y+z=1} \\ \cancel{z+w=0} \end{array}}.
 \end{array}$$

4. Spazio vettoriale: $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ con elemento generico $p(x)$. Relazioni da esaminare:

$$\begin{array}{cccccc}
 \cancel{p(0)=5}, & \text{DIM}=3 & \text{DIM}=3 & \cancel{p(5)=5}, & \text{DIM}=3 \\
 p(5)=0, & p(0)=0, & p(0)=0, & p(0)=p(5), \\
 \text{DIM}=2 & & & & \\
 p(5)=p(\pi)=0, & \cancel{p(\pi)=p(0)=5}, & ? & \text{DIM}=3 & \cancel{p(9) \leq 0}, \\
 \text{DIM}=2 & p(x)=p(-x), & \cancel{p(x)+p(2x)=5x}, & \text{DIM}=1 & p(x)=p(x^2), & 7p(x)=p(7x). \text{ DIM}=1
 \end{array}$$

5. Determinare come sono fatti tutti i sottospazi vettoriali di \mathbb{R} , di \mathbb{R}^2 e di \mathbb{R}^3 .