Coordinate polari nel piano

Argomenti: Coordinate polari **Difficoltà:** ⋆⋆

Prerequisiti: Coordinate cartesiane e polari, formule di passaggio

---

Completare le seguenti tabelle, in cui si intende che (x, y) sono le coordinate cartesiane e ρ e θ sono le coordinate polari di uno stesso punto (θ è sempre inteso in radianti).

	x	y	ρ	θ
1)	1	0	1	0
2)	0	1	1	$\pi/2$
3)	-1	0	1	π
4)	0	-1	1	$\frac{3}{2}\pi$
5)	1	1	$\sqrt{2}$	$\pi/4$
6)	1	-1	$\sqrt{2}$	$7\pi/4$
7)	-4	4	$4\sqrt{2}$	$\frac{3}{4}\pi$
8)	1	$-\sqrt{3}$	2	$5\pi/3$
9)	0	0	0	—
10)	$-\sqrt{3}$	-1	2	$7/6\,\pi$

x	y	ρ	θ
0	2	2	$\pi/2$
-3	0	3	π
-1	0	1	5π
0	0	0	π
0	0	0	$\pi/4$
$\sqrt{3}$	1	2	$\pi/6$
0	-6	6	$-\pi/2$
$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{6}/2$	$\sqrt{2}$	$-4\pi/3$
-5	5	$5\sqrt{2}$	$3\pi/4$
$-2\sqrt{3}$	-2	4	$7\pi/6$

Determinare quanti sono i punti del piano cartesiano che verificano le seguenti relazioni. Più delicato ma molto istruttivo: oltre a trovare il numero di soluzioni, si consiglia di rappresentare graficamente la situazione e determinare esplicitamente le eventuali soluzioni.

	Relazioni	Soluzioni
11)	$x = 2013,\ \rho = 2014$	2
12)	$x = 2013,\ \rho = 2013$	1
13)	$x = 2013,\ \rho = 2012$	0
14)	$y = -2013,\ \rho = 2014$	2
15)	$y = -2013,\ \rho = 2013$	1
16)	$x = 2013y,\ \rho = 2$	0
17)	$x + y = -3,\ \rho = 3$	2
18)	$x + y = -3,\ \rho = 4$	2
19)	$x - y = 3,\ \rho = 4$	2

Relazioni	Soluzioni
$x + y = -3,\ \rho = 5$	2
$x = 2013,\ \theta = \pi/4$	1
$x = 2013,\ \tan\theta = -1$	1
$x = -2013,\ \tan\theta = -1$	1
$x = 2013,\ \theta = 1$	1
$x = 2013,\ \theta = 2$	1
$x + y = 2013,\ \theta = 2\pi/3$	1
$y = x^2,\ \rho = 7$	2
$y = x^2 - 7,\ \theta = 3$	2

Rette nel piano 1

Argomenti: Descrizione di rette nel piano **Difficoltà:** ★★

Prerequisiti: Descrizione cartesiana vs descrizione parametrica per rette del piano

---

Scrivere nella forma $y = mx + n$ (o nella forma $x = x_0$ se si tratta di rette parallele all'asse y) l'equazione cartesiana delle rette rappresentate dalle seguenti equazioni parametriche (si intende che il parametro t varia sempre in tutto $\mathbb{R}$). Le equazioni parametriche sono volutamente scritte alternando a caso i possibili modi di indicarle.

Parametrica	Cartesiana
$(3+t, 5-t)$	$y=-x+8$
$(2,-1)+t(3,4)$	$y=\frac{4}{3}x-\frac{11}{3}$
$(-2,1)+t(3,4)$	$y=\frac{4}{3}x+\frac{11}{3}$
$(5-6t, 3-8t)$	$y=\frac{4}{3}x-\frac{11}{3}$
$(3t-4, 4t-9)$	$y=\frac{4}{3}x-\frac{11}{3}$
$(t-2, 5)$	$y=5$
$(-2, 3t+5)$	$x=-2$
$(5,1)+t(0,-2)$	$x=5$

Parametrica	Cartesiana
$(t+5, t+7)$	$y=x+2$
$(3t+7, 3t+9)$	$y=x+2$
$(0,2)-t(2,2)$	$y=x+2$
$(3,0)-2t(1,-2)$	$y=-2x+6$
$(t+2, 2-2t)$	$y=-2x+6$
$(\pi,\sqrt{2})+t(666,0)$	$y=\sqrt{2}$
$(3,3)+t(-1,-1)$	$y=x$
$(2013t+2014, 2015t-2016)$	$y=\frac{2015}{2013}x-\frac{2016\cdot 2013+2014\cdot 2015}{2013}$

Nel seguente esercizio viene data l'equazione cartesiana di una retta r ed una descrizione parametrica con 2 costanti a e b incognite. Si chiede per quali valori di a e b (posto che ne esistano) la descrizione parametrica rappresenta proprio r. Non è una brutta idea farsi anche un disegno per capire come vanno le cose …

Cartesiana	Parametrica	a	b
$y = 2x$	$(a+t, bt)$	0	2
$y = 2x$	$(a+2t, bt)$	0	4
$y = 2x$	$(a+t, 3+bt)$	3/2	2
$x-y+3=0$	$(a+bt, 2-5t)$	−1	−5
$x-y+3=0$	$(2-5t, a+bt)$	5	−5
$x-y+3=0$	$(1,a)+t(1,b)$	4	1
$x-y+3=0$	$(2,a)+t(2,b)$	5	2
$x-y+3=0$	$(2,a)+t(b,2)$	5	2
$x+y+3=0$	$(2,a)+t(b,2)$	−5	−2

Cartesiana	Parametrica	a	b
$3x+2y=7$	$(1,a)+t(1,b)$	2	$-\frac{3}{2}$
$3x+2y=7$	$(1,a)+t(b,1)$	2	$-\frac{2}{3}$
$3x+2y=7$	$(2,a)+t(b,2)$	1/2	$-\frac{4}{3}$
$x=3$	$(a,5)+t(b,7)$	3	0
$y+2=0$	$(t+a, bt-2)$	$\in\mathbb{R}$	0
$y+2=0$	$(t+a, bt+2)$	—	—
$3x-2y=7$	$(a+t, 3-bt)$	13/3	$-\frac{3}{2}$
$\pi x-2y=3$	$(a+bt, t+1)$	$5/\pi$	$2/\pi$
$x-2\pi y=3$	$(a+bt, t+1)$	$3+2\pi$	2π

Rette nel piano 2

Argomenti: Descrizione di rette nel piano **Difficoltà:** $\star\star$

Prerequisiti: Descrizione cartesiana e parametrica di rette, prodotto scalare in $\mathbb{R}^2$

Sono date 2 rette r_1 ed r_2, descritte in vari modi.

Per prima cosa si chiede di determinare l'equazione cartesiana della parallela ad r_1 passante per l'origine (scrivendola nella forma $y = mx + n$ o $x = x_0$). Successivamente si chiede di stabilire se r_1 ed r_2 sono coincidenti (C), distinte e parallele (P), oppure incidenti (I). Nel caso in cui siano incidenti, trovare il punto di interesezione ed il coseno dell'angolo θ che formano (si intende che θ è l'ampiezza dei 2 angoli minori tra i 4 che le rette formano intersecandosi).

	r_1	r_2	Parallela	C-P-I	Intersezione	$\cos\theta$
1)	$y = 3x + 2$	$y - 3x + 2 = 0$	$y=3x$	P	—	—
2)	$y = 3x + 2$	$(t-1, 3t-1)$	$y=3x$	C	—	—
3)	$y = 3x + 2$	$(t+1, 3t-1)$	$y=3x$	P	—	—
4)	$(2,3) + t(-1,2)$	$(2t+3, 1-4t)$	$y=-2x$	P	—	—
5)	$3x + 2y + 5 = 0$	$3x - 2y + 5 = 0$	$y=-\frac{3}{2}x$	I	$(-\frac{5}{3}, 0)$	$+5/13$
6)	$3x + 2y + 5 = 0$	$3x + 2y - 5 = 0$	$y=-\frac{3}{2}x$	P	—	—
7)	$3x + 2y + 5 = 0$	$-3x + 2y + 5 = 0$	$y=-\frac{3}{2}x$	I	$(0, -\frac{5}{2})$	$+5/13$
8)	$x = 3$	$(5,6) + t(3,-1)$	$x=0$	I	$(3, \frac{20}{3})$	$\sqrt{10}/10$
9)	$y + 7 = 0$	$(2-t, 6+t)$	$y=0$	I	$(1, 7)$	$\sqrt{2}/2$
10)	$(1,-2) + t(2,-1)$	$(-1,2) + t(1,-2)$	$y=-\frac{x}{2}$	I	$(1,-2)$	$4/5$
11)	$(1,3) + t(1,1)$	$(2-3t, 3t)$	$y=x$	I	$(0,2)$	0
12)	$(1,t)$	$(t,2)$	$x=0$	I	$(1,2)$	0
13)	$(3,-t)$	$2x - 3y = 7$	$x=0$	I	$(3, -1/3)$	$3\sqrt{13}/13$
14)	$(3t+7, 2t-1)$	$2y = 3x + 5$	$y=\frac{2}{3}x$	I	$(\frac{59}{5}, \frac{26}{5})$	$12/13$
15)	$(3t+7, 2t-1)$	$3y = 2x + 5$	$y=\frac{2}{3}x$	P	—	—
16)	$(6t, 0)$	$x = -4$	$y=0$	I	$(-4, 0)$	0
17)	$(6t, 0)$	$y = -4$	$y=0$	P	—	—
18)	$-y = -x - 1$	$(-t, -2t)$	$y=x$	I	$(1, 2)$	$3\sqrt{10}/10$
19)	$-y = -x - 1$	$(-30, 29) + t(1,-1)$	$y=x$	I	$(-1, 0)$	0
20)	$3x - 4y = 0$	$(-3t, 4+t)$	$y=\frac{3}{4}x$	I	$(\frac{12}{13}, \frac{9}{13})$	$3\sqrt{10}/10$
21)	$3x - 4y = 0$	$4x - 3y = \log_2 5$	$y=\frac{3}{4}x$	I	[illegible]	$24/25$

Test di allenamento n. 3

Rette nel piano 3

Argomenti: Descrizione di rette nel piano **Difficoltà:** $\star\star\star$

Prerequisiti: Descrizione cartesiana e parametrica di rette, prodotto scalare in $\mathbb{R}^2$

Sono dati una retta r (in vari modi) ed un punto (x_0, y_0). Si chiede di determinare l'equazione della parallela e della perpendicolare ad r passanti per (x_0, y_0), e della perpendicolare ad r passante per l'origine. Fornire la risposta nella forma $y = mx + n$ o nella forma $x = x_0$.

	Retta r	(x_0, y_0)	Parallela	Perpendicolare	Perpend. origine
1)	$y = 2x$	$(1,1)$	$y=2x-1$	$y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$	$y=-\frac{1}{2}x$
2)	$2x + y = 3$	$(1,1)$	$y=-2x$	$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$	$y=\frac{1}{2}x$
3)	$x = -7$	$(2,3)$	$x=0$	$y=3$	$y=0$
4)	$4 - y = 0$	$(-3,2)$	$y=0$	$x=-3$	$x=0$
5)	$(2,3) + t(-1,-1)$	$(5,5)$	$y=x$	$y=-x+10$	$y=-x$
6)	$(3 + t, 2t + 5)$	$(-2,1)$	$y=2x+5$	$y=-\frac{1}{2}x$	$y=-\frac{1}{2}x$
7	$(1,1) - t(2,0)$	$(3,-4)$	$y=-4$	$x=3$	$x=0$
8)	$(t, t+1)$	$(-1,0)$	$y=x+1$	$y=-x-1$	$y=-x$

Sono dati un punto (x_0, y_0), un angolo θ (espresso talvolta in gradi sessagesimali, talvolta in radianti), ed una retta r (in vari modi).

Si chiede di determinare la retta r_1 passante per (x_0, y_0) che forma un angolo θ con il semiasse positivo delle x, e le rette r_2 ed r_3 che passano per (x_0, y_0) e formano un angolo θ con la retta data r. Fornire le risposte nella forma $y = mx + n$ o nella forma $x = x_0$.

	(x_0, y_0)	θ	Retta r	Retta r_1	Rette r_2 ed r_3
9)	$(-1,0)$	$45°$	$x + y = 7$	$y=x+1$	$x=-1$ $y=0$
10)	$(1,0)$	$45°$	$x + 2y = 7$	$y=x-1$	$x=1$ $y=0$
11)	$(2,3)$	$-\pi/3$	$x = 4$	$y=-\sqrt{3}x+2\sqrt{3}+3$	$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{2\sqrt{3}}{3}+3$ $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{2\sqrt{3}}{3}+3$
12)	$(2,3)$	$\pi/3$	$2x + y = 3$	$y=\sqrt{3}x-2\sqrt{3}+3$	$y=3$ $y=\sqrt{3}x-2\sqrt{3}+3$
13)	$(2,-1)$	$30°$	$(1,1) + t(3,4)$	$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{2}{3}\sqrt{3}-1$	$y=-\left(1+\frac{5}{6}\sqrt{3}\right)x+\left(1+\frac{5}{3}\sqrt{3}\right)$
14)	$(0,0)$	$-\pi/4$	$(-t, 3t)$	$y=-x$	$y=-\frac{x}{2}$ $y=2x$
15)	$(0,1)$	$\arccos(1/3)$	$3x + y = 1$	$y=2\sqrt{2}x+1$	$y=\frac{21-16\sqrt{2}}{72}x+1$
16)	$(5,3)$	$\arctan(1/2)$	$(2t + 1, -t + 4)$	$y=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$	$y=0$ $y=-\frac{5}{3}x+\frac{25}{3}$
17)	$(3,-1)$	$\arccos(-1/3)$	$(2t - 1, t)$	$y=2\sqrt{2}x-1-6\sqrt{2}$	$y=\frac{-3-5\sqrt{2}}{2}x+\frac{25+15\sqrt{2}}{2}$
