BY GIMUSI 13/02/15

Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ derivabile 2 volte e tale che, per ogni $x \in \mathbf{R}$ si abbia $|f''(x)| \leq 4$. Supponiamo inoltre che $f(x)$ sia identicamente nulla per $x \leq 0$.
Mostrare che $|f(2)| \leq 8$.

TEOREMA DI LAGRANGE

$\forall x > 0 \quad f'(x) - f'(0) = (x-0)\, f''(c) \qquad c \in (0,x)$

$f'(0) = 0 \quad (f' \text{ DERIV.} \Rightarrow \text{CONT.}) \qquad f'(x) = x \cdot f''(c)$

$|f'(x)| = x \cdot |f''(c)| \leq 4 \cdot x$

$$f(x) = \int_0^x f'(\sigma)\, d\sigma$$

$$|f(x)| = \int_0^x |f'(\sigma)|\, d\sigma \leq \int_0^x 4\sigma\, d\sigma = \left[2\sigma^2\right]_0^x = 2x^2$$

$\rightsquigarrow \quad |f(2)| \leq 8$