1. Consideriamo nello spazio il triangolo con vertici in

$$A = (1, 2, 4), \qquad B = (1, 0, 3), \qquad C = (-1, 1, 1).$$

(a) Calcolare l'area del triangolo.

(b) Determinare se si tratta di un triangolo acutangolo, rettangolo o ottusangolo.

(c) Determinare il piede dell'altezza uscente dal vertice B.

(a) $B-A = (0,-2,-1) \qquad C-A = (-2,-1,-3)$

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (5,2,-4) \qquad \text{Area} = \frac{1}{2}\|(5,2,-4)\| = \boxed{\frac{\sqrt{45}}{2}}$$

(b) Calcolo le lunghezze dei lati e vedo che succede:

$AB^2 = \|(0,-2,-1)\|^2 = 5$

$AC^2 = \|(-2,-1,-3)\|^2 = 14$

$BC^2 = \|(2,-1,2)\|^2 = 9$

$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow$ $\boxed{\text{il triangolo è rettangolo in } B}$

(c) Retta AC : $A + t(C-A) = (1,2,4) + t(-2,-1,-3) = (1-2t, 2-t, 4-3t)$

Piano per B e $\perp$ retta AC : $2x+y+3z = 11$

Intersezione retta-piano : $2(1-2t) + (2-t) + 3(4-3t) = 11$

$2-4t+2-t+12-9t = 11, \quad 14t = 5, \quad t = \frac{5}{14}$

$$\left(1-\frac{5}{7}, 2-\frac{5}{14}, 4-\frac{15}{14}\right) = \boxed{\left(\frac{2}{7}, \frac{23}{14}, \frac{41}{14}\right)} = H$$

Due modi alternativi di fare l'area del triangolo

① $\frac{1}{2} BC \cdot BA = \frac{1}{2}\cdot 3 \cdot \sqrt{5} = \frac{3}{2}\sqrt{5} = \frac{1}{2}\sqrt{45}$ ☺

② $\frac{1}{2} AC \cdot BH = \frac{1}{2}\sqrt{14}\cdot \|B-H\| = \frac{1}{2}\sqrt{14}\left\|\left(\frac{5}{7}, -\frac{23}{14}, \frac{1}{14}\right)\right\|$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{14}\cdot\frac{\sqrt{100+529+1}}{14} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{630}}{\sqrt{14}} = \frac{1}{2}\sqrt{45}$$ ☺

2. Consideriamo, al variare del parametro reale a, il sistema lineare

$$\begin{aligned} x + 2y + az &= 0 \\ 2x + ay + 8z &= 0 \\ ax + 8y + 16z &= 0 \end{aligned}$$

(a) Dimostrare che per $a = -4$ il sistema ha infinite soluzioni, e descrivere esplicitamente l'insieme di tali soluzioni.

(b) Determinare per quali altri valori di a il sistema ha soluzione non unica, e risolvere esplicitamente il sistema per tali valori di a.

(a) Per $a = -8$ ottengo $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 2 & -8 & 8 \\ -8 & 8 & 16 \end{pmatrix}$ Lavoro alla Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 1 & -4 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & -6 & 12 \\ 0 & 3 & -6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x + 2y - 8z &= 0 \\ -y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

$z = t, \quad y = 2t, \quad x = 8z - 2y = 8t - 4t = 4t$

$$(x, y, z) = (4t, 2t, t) = \boxed{t\,(4, 2, 1)}$$

verifica veloce

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & a & 8 \\ a & 8 & 16 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \text{Det} = 0 &\iff 48a - a^3 - 128 = 0 \\ &\iff a^3 - 48a + 128 = 0 \\ &\iff (a+8)(a^2 - 8a + 16) = 0 \\ &\iff (a+8)(a-4)^2 = 0 \\ &\iff a = -8 \text{ oppure } \boxed{a = 4} \end{aligned}$$

Resta da considerare il caso $a = 4$.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 4 & 8 & 16 \end{pmatrix}$ Tutte le righe sono multiple della 1^a, quindi basta risolvere

$$x + 2y + 4z = 0$$

$z = t, \quad y = s, \quad x = -2y - 4z = -2s - 4t$

$$(x, y, z) = (-2s - 4t, s, t) = \boxed{t\,(-4, 0, 1) + s\,(-2, 1, 0)}$$

(veloce verifica)

3. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici 2×2. Consideriamo l'applicazione lineare $f: V \to V$ definita da $f(A) = 2A + 3A^t$ per ogni $A \in V$.
Dimostrare che f è diagonalizzabile e determinare una base di V rispetto alla quale f assume la forma diagonale.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3a & 3c \\ 3b & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a & 2b+3c \\ 2c+3b & 5d \end{pmatrix}$$

Rispetto alla base canonica di V la matrice associata ad f è

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Cerco gli autovalori

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = (5-\lambda)^2\left[(2-\lambda)^2 - 9\right] = (5-\lambda)^2(\lambda^2 - 4\lambda - 5) =$$
$$= (5-\lambda)^2(\lambda-5)(\lambda+1)$$

$\Rightarrow$ autovalori $\lambda = 5$ $\lambda = -1$. Con $\lambda = 5$ la matrice $A - 5\,Id$ è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango} = 1 \Rightarrow m_g(5) = m_a(5) = 3 \Rightarrow \text{diagonalizz.}$$

Autospazio $= \text{span}(\{(1,0,0,0), (0,1,1,0), (0,0,0,1)\})$

Con $\lambda = -1$ invece abbiamo

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Autospazio} = \text{span}(\{(0,1,-1,0)\})$$

Quindi la forma diagonale è

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base

$$\underbrace{v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

verifica immediata che vanno in 5 volte se stessi (e sono lin. indip.)

$$v_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$ $\leftarrow$ verifica semplice che va in $-$ se stesso.

4. Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ il prodotto scalare rappresentato dalla matrice $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

(a) Dimostrare che il prodotto scalare è definito positivo.

(b) Determinare una base ortogonale, costituita da vettori a coordinate intere, del sottospazio W di equazione cartesiana $x + y + z = 0$.

(c) Determinare una base di $W^\perp$.

(a) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad \text{Det}_{1\times1} = 5$

$\text{Det}_{2\times2} = 24$ $\quad + \; + \; + \; +$

$\text{Det}_{3\times3} = 125 - 5 - 5 = 115$

$\boxed{3p \Rightarrow \text{segnatura } (3,0,0)}$

(b) Una base di W è $\{ \underbrace{(1,-1,0)}_{v_1}, \underbrace{(1,0,-1)}_{v_2} \}$

La ortogonalizzo con GS:

$w_1 = v_1 = (1,-1,0)$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle_B}{\langle w_1, w_1 \rangle_B} w_1 = (1,0,-1) - \frac{5}{8}(1,-1,0) = \left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}, -1\right)$$

$$\langle v_2, w_1 \rangle_B = (1 \;\; 0 \;\; -1) \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 5$$

$(5 \;\; 0 \;\; -5)$

$\langle w_1, w_1 \rangle_B = 5 + 5 - 2 = 8$

Volendo vettori a coordinate intere una base ortogonale è

$\boxed{(1,-1,0)}$ $\boxed{(3,5,-8)}$

(c) $W^\perp = \text{Span}\{(a,b,c)\}$

$\uparrow$ B-ortogonale ad una base di W

$$(a \;\; b \;\; c) \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = (5a+b \quad a+5b+c \quad b+5c)$$

Ort. a $(1,-1,0) \Rightarrow 5a+b-a-5b-c=0$ $\qquad 4a-4b-c=0$

" " $(1,0,-1) \Rightarrow 5a+b-b-5c=0$ $\qquad a=c$

$3a = 4b \Rightarrow a=c=4, \; b=3 \rightsquigarrow \boxed{(4,3,4)}$