Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Prova in itinere di Analisi Matematica 1

Pisa, 28 Novembre 2014

(Problemi da 3 punti)

1. Consideriamo la funzione $f(x) = |2^{-x} - 1|$, pensata come $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   Calcolare l'immagine e la controimmagine di $(-\infty, 1]$.

2. Calcolare il limite della successione $\sqrt[n]{\binom{2n}{n}}$.

3. Determinare lo sviluppo di Taylor di ordine 4, con centro nell'origine, della funzione $f(x) = e^{\sin(2x)}$.

4. Calcolare
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 2^n \cdot (-1)^n}{5^n}.$$

(Problemi da 8 punti)

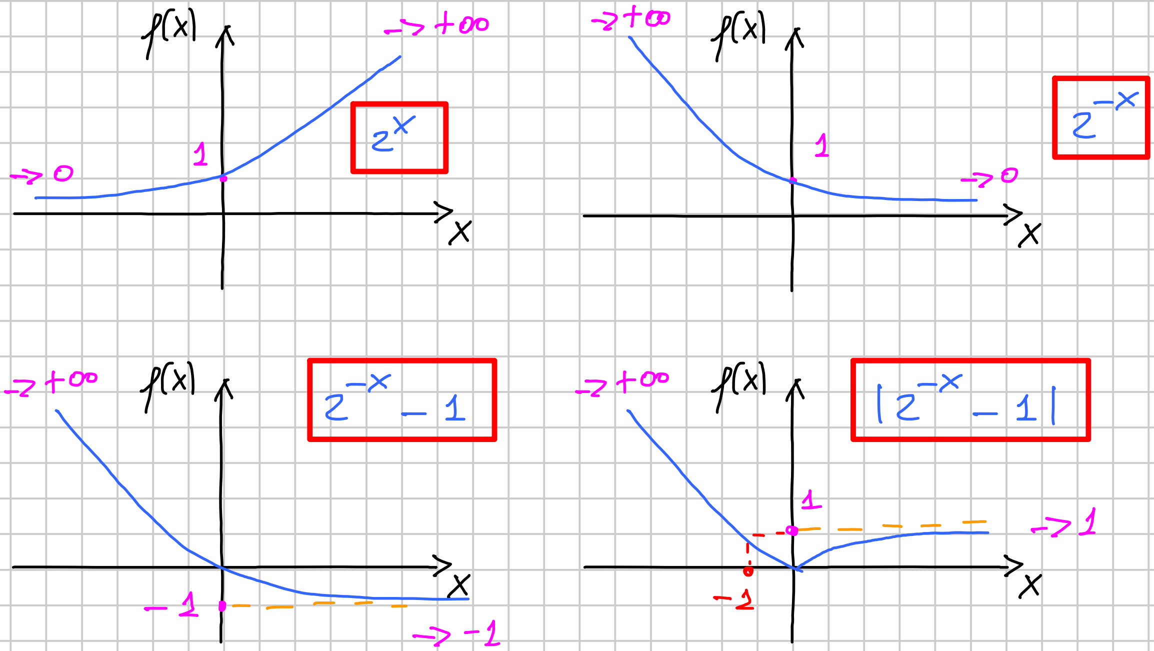
5. Studiare, al variare del parametro reale λ, l'iniettività e la surgettività della funzione $f_\lambda : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da
$$f_\lambda(x) = \log x - \lambda \arctan x.$$

6. Consideriamo la successione
$$a_n = \frac{1}{n^2} \sin \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n^2}.$$
   (a) Determinare se definitivamente si ha che $a_n > 0$ oppure $a_n < 0$.
   (b) Studiare, al variare del parametro reale α, la convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^\alpha.$$

7. (a) Dimostrare che per ogni intero $n \geq 1$ esiste una costante $c > 0$ tale che
$$2^x \geq c(\arctan x + x^n) \qquad \forall x \geq 0. \tag{1}$$
   (b) Determinare se esiste una costante $c > 0$ tale che
$$2^x \geq c(\arctan x + x^n) \qquad \forall x \geq 0 \quad \forall n \geq 1.$$
   (c) Detta c_n la più grande costante reale per cui vale la (1), calcolare il limite della successione $c_n \cdot n!$.

1. Consideriamo la funzione $f(x) = |2^{-x} - 1|$, pensata come $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

   Calcolare l'immagine e la controimmagine di $(-\infty, 1]$.



$$\begin{cases} \text{IMMAGINE DI } (-\infty, 1] \to [0, +\infty) \\ \text{CONTROIMMAGINE DI } (-\infty, 1] \to [-1, +\infty) \end{cases}$$

2. Calcolare il limite della successione $\sqrt[n]{\binom{2n}{n}}$.

$$a_n = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!^2} \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} \, \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \to 4$$

PER CRITERIO RAPPORTO-RADICE $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\binom{2n}{n}} \to 4$

3. Determinare lo sviluppo di Taylor di ordine 4, con centro nell'origine, della funzione $f(x) = e^{\sin(2x)}$.

$$\sin(2x) = 2x - \frac{(2x)^3}{6} + o(x^4) \qquad e^{\sin 2x} = e^{\left(2x - \frac{(2x)^3}{6} + o(x^4)\right)} =$$

$$= 1 + 2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}\left(2x - \frac{4}{3}x^3\right)^2 + \frac{1}{6}(2x)^3 + \frac{1}{24}(2x)^4 + o(x^4) =$$

$$= 1 + 2x - \cancel{\frac{4}{3}x^3} + 2x^2 - \frac{8}{3}x^4 + \cancel{\frac{4}{3}x^3} + \frac{\overset{2}{\cancel{16}}}{\underset{3}{\cancel{24}}}x^4 + o(x^4) =$$

$$= 1 + 2x + 2x^2 - 2x^4 + o(x^4)$$

4. Calcolare
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 2^n \cdot (-1)^n}{5^n}.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n+2^n(-1)^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{5^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{5^n}(-1)^n = \frac{5}{2}+\frac{5}{7} = \frac{35+10}{14} = \frac{45}{14}$$

SERIE GEOM. : $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha} \qquad |\alpha|<1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = \frac{1}{1-3/5} = \frac{5}{2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n (-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{2n} - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{2n+1} = \frac{25}{21} - \frac{10}{21} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$$

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{25}\right)^n = \frac{1}{1-4/25} = \frac{25}{21} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{2n+1} = \frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{2n} = \frac{2}{5}\,\frac{25}{21} = \frac{10}{21} \end{cases}$$

5. Studiare, al variare del parametro reale λ, l'iniettività e la surgettività della funzione $f_\lambda : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da
$$f_\lambda(x) = \log x - \lambda \arctan x.$$

<u>INIETTIVITA'</u>

$f_\lambda(x) = \log(x) - \lambda \text{ ARCTAN } x$

<u>$\lambda = 0$</u> $\quad f_\lambda(x) = \log(x) \rightsquigarrow$ INIETTIVA

STRETT. CRESC. $\qquad$ STRETT. CRESC.

<u>$\lambda < 0$</u> $\quad f_\lambda(x) = \log(x) + |\lambda| \text{ ARCTAN } x \rightsquigarrow$ STRETT. CRESC.

$\Longrightarrow$ INIETTIVA

$\underline{\lambda > 0}$ $\quad f_\lambda'(x) = \frac{1}{x} - \lambda \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2-\lambda x}{x(1+x^2)}$

$x^2 - \lambda x + 1 = 0 \qquad x = \frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}$

$0 < \lambda < 2 \qquad f_\lambda'(x) > 0 \rightsquigarrow$ STRETT. CRESC. $\Rightarrow$ INIETTIVA

$\lambda = 2 \qquad f_\lambda'(x) \geq 0 \ \wedge \ f_\lambda'(x) = 0$ SOLO IN $x = 1$

$\rightsquigarrow$ STRETT. CRESC. $\Rightarrow$ INIETTIVA

$\lambda > 2 \qquad f_\lambda'(x)$

$$\begin{array}{ccccc} & & x_1 & & x_2 & \\ 0 & +++++ & 0 & ---- & 0 & +++++ \\ & & \text{MAX} & & \text{MIN} & \end{array}$$

$\Rightarrow$ NON INIETTIVA

$\rightsquigarrow f_\lambda(x) \begin{cases} \text{INIETTIVA} & \lambda \in (-\infty, 2] \\ \text{NON INIETTIVA} & \lambda \in (2, +\infty) \end{cases}$

<u>SURGETTIVITÀ</u>

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} f_\lambda(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \underbrace{\lg(x)}_{\to -\infty} - \lambda \underbrace{\arctan x}_{\to 0} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} f_\lambda(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \underbrace{\lg(x)}_{\to +\infty} - \underbrace{\lambda \arctan x}_{\to -\lambda\frac{\pi}{2}} = +\infty \end{cases}$$

$\rightsquigarrow f_\lambda(x)$ È SURGETTIVA $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

6. Consideriamo la successione

$$a_n = \frac{1}{n^2}\sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\sin\frac{1}{n^2}.$$

(a) Determinare se definitivamente si ha che $a_n > 0$ oppure $a_n < 0$.

(b) Studiare, al variare del parametro reale α, la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{\alpha}.$$

(a) $n = \frac{1}{x}$ $\quad a_n \rightsquigarrow f(x) = x^2 \sin x - x \sin x^2 \quad x \to 0^+$

$$f(x) = x^2\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - x\left(x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6)\right)$$

$$= x^3 - \frac{x^5}{6} + o(x^5) - x^3 = -\frac{x^5}{6} + o(x^5)$$

$\rightsquigarrow a_n < 0$ DEFINITIVAMENTE

(b) $b_n = \frac{1}{n^{5\alpha}}$

$$\frac{|a_n|^{\alpha}}{b_n} = \frac{\frac{1}{6n^{5\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^5}\right)}{\frac{1}{n^{5\alpha}}} \to \frac{1}{6} \implies \sum |a_n|^{\alpha} \sim \sum b_n$$

CRIT. ASINTOTICO $\implies \begin{cases} \text{CONVERGE PER } \alpha > 1/5 \\ \text{DIVERGE PER } \alpha \leq 1/5 \end{cases}$

7. (a) Dimostrare che per ogni intero $n \geq 1$ esiste una costante $c > 0$ tale che

$$2^x \geq c(\arctan x + x^n) \qquad \forall x \geq 0. \tag{1}$$

(b) Determinare se esiste una costante $c > 0$ tale che

$$2^x \geq c(\arctan x + x^n) \qquad \forall x \geq 0 \quad \forall n \geq 1.$$

(c) Detta c_n la più grande costante reale per cui vale la (1), calcolare il limite della successione $c_n \cdot n!$.

(a) $2^x \geq c(\arctan x + x^n) \overset{2^x>0}{\Rightarrow} \frac{1}{c} \geq \frac{\arctan x + x^n}{2^x} = f(x) > 0$

$f(0) = 0 \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \overset{\text{WEIERSTRASS}}{\Rightarrow} \exists$ MASSIMO $f_{MAX} > 0$

$\rightsquigarrow 2^x \geq c(\arctan x + x^n) \quad \forall\, c \leq 1/f_{MAX}$

(b) $\forall x > 1 \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{\arctan x + x^n}{2^x} = +\infty$

$\Rightarrow \forall\, \frac{1}{c} > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq n_0 \quad \frac{\arctan x + x^n}{2^x} > \frac{1}{c}$

$\rightsquigarrow \nexists\, c > 0$ t.c. $2^x \geq c(\arctan x + x^n) \quad \forall x \geq 0 \quad \forall n \geq 1$

(c) $f(x) = \frac{\arctan x + x^n}{2^x}$

STUDIO IL MAX PER $n \to +\infty$ CON $x > 1$

$f(x) = \frac{\arctan x + x^n}{2^x} = \frac{x^n}{2^x}\left(\frac{\arctan x}{x^n} + 1\right)$

PER $n \to +\infty \quad f_{MAX} \simeq g_{MAX}$ CON $g(x) = \frac{x^n}{2^x}$

$g(0) = 0 \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0 \Rightarrow$ x W. $\exists\, g_{MAX}$

$$g'(x) = \frac{n x^{n-1} \cdot \cancel{2^x} - \cancel{2^x} \lg 2\, x^n}{(2^x)^{\cancel{2}}} = 0 \qquad n x^{n-1} - \lg 2 \cdot x^n = 0$$

$$x^n (n - \lg 2 \cdot x) = 0 \implies \begin{cases} x = 0 \\ x = n/\lg 2 \end{cases}$$

PUNTO DI MAX PER g

PERTANTO:

$$f_{MAX} = f(x_n) = \frac{\arctan x_n + x_n^n}{2^{x_n}} \qquad x_n \sim n \qquad n \to +\infty$$

$$c_n = \frac{1}{f_{MAX}} = \frac{2^{x_n}}{\arctan x_n + x_n^n} \sim \frac{2^n}{\arctan n + n^n}$$

$$c_n \cdot n! \sim \frac{2^n \cdot n!}{\arctan n + n^n} = \underbrace{\frac{2^n \cdot n!}{n^n}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{\frac{\arctan n}{n^n} + 1}}_{\to 1} \to 0$$

INFATTI:

$$a_n = \frac{2^n \cdot n!}{n^n} \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{\cancel{n}+1}}{\cancel{2^n}_1} \cdot \frac{\cancel{(n+1)!}}{\cancel{n!}_1} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+\cancel{1}}} =$$

$$= 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to 2/e < 1$$