BY GIMUSI 06/01/13

Funzioni iperboliche

Argomenti: funzioni iperboliche **Difficoltà:** ⋆⋆

Prerequisiti: funzioni iperboliche

---

1. (Comportamento qualitativo e grafico)
   (a) Calcolare i limiti delle funzioni iperboliche per $x \to \pm\infty$.
   (b) Enunciare e dimostrare le proprietà di simmetria delle funzioni iperboliche e delle relative inverse.
   (c) Enunciare e dimostrare per via elementare le proprietà di iniettività, surgetività e monotonia delle funzioni iperboliche.
   (d) Tracciare grafici approssimativi delle funzioni iperboliche e delle relative inverse.

2. (Derivate e sviluppi)
   (a) Determinare le derivate delle funzioni iperboliche e delle relative inverse.
   (b) Enunciare e dimostrare gli analoghi dei limiti notevoli e gli sviluppini per le funzioni iperboliche.
   (c) Determinare gli sviluppi di Taylor di $\sinh x$ e $\cosh x$.

3. (Formulario della trigonometria iperbolica)
   (a) Dimostrare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha
   $$\cosh x + \sinh x = e^x, \qquad \cosh x - \sinh x = \overset{e^{-x}}{\cancel{e^x}}.$$
   (b) Dimostrare la relazione fondamentale
   $$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$
   (c) Enunciare e dimostrare le formule di duplicazione per $\sinh x$ e $\cosh x$.
   (d) Enunciare e dimostrare le formule di addizione e sottrazione per $\sinh x$, $\cosh x$ e $\tanh x$.
   (e) Dedurre dalle precedenti le formule "product $\to$ sum" e "sum $\to$ product" della trigonometria iperbolica.

4. Determinare formule esplicite per le funzioni iperboliche inverse in termini di logaritmi.

5. Determinare lo sviluppo di Taylor dell'inversa della funzione $\tanh x$.

6. (Questa domanda richiede un minimo di conoscenza dei numeri complessi)
   Giustificare le relazioni
   $$\cosh x = \cos(ix) \qquad \sinh x = -i\sin(ix)$$
   - utilizzando le definizioni e la forma esponenziale dei numeri complessi,
   - utilizzando formalmente gli sviluppi di Taylor.

1/11

1. (Comportamento qualitativo e grafico)

(a) Calcolare i limiti delle funzioni iperboliche per $x \to \pm\infty$.

$$\cosh x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} \qquad \sinh x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} \qquad \tanh x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \cosh x = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} = \lim_{x\to+\infty} \overset{\to+\infty}{\frac{e^{x}}{2}} + \overset{\to 0}{\frac{e^{-x}}{2}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \cosh x = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} = \lim_{x\to+\infty} \overset{\to 0}{\frac{e^{x}}{2}} + \overset{\to+\infty}{\frac{e^{-x}}{2}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sinh x = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} = \lim_{x\to+\infty} \overset{\to+\infty}{\frac{e^{x}}{2}} - \overset{\to 0}{\frac{e^{-x}}{2}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \sinh x = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} = \lim_{x\to+\infty} \overset{\to 0}{\frac{e^{x}}{2}} - \overset{\to-\infty}{\frac{e^{-x}}{2}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \tanh x = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \overset{\to 1}{\frac{e^{x}}{e^{x}}} \overset{\to 1}{\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \tanh x = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \overset{\to 1}{\frac{e^{-x}}{e^{-x}}} \overset{\to -1}{\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}} = -1$$

(b) Enunciare e dimostrare le proprietà di simmetria delle funzioni iperboliche e delle relative inverse.

$$\cosh x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} = \cosh(-x) = \frac{e^{-x}+e^{+x}}{2} \qquad \text{PARI}$$

$$\sinh x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} = -\sinh(-x) = -\frac{e^{-x}-e^{x}}{2} \qquad \text{DISPARI}$$

$$\tanh x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} = -\tanh(-x) = -\frac{e^{-x}-e^{+x}}{e^{-x}+e^{+x}} \qquad \text{DISPARI}$$

$\cosh x$ PARI $\Rightarrow (\cosh x)^{-1} = \text{settcosh}\, x$ NON DEF. SU TUTTO $\mathbb{R}$

$\sinh x$ DISPARI $\Rightarrow (\sinh x)^{-1} = \text{settsinh}\, x$ SE ESISTE È DISPARI

$\tanh x$ DISPARI $\Rightarrow (\tanh x)^{-1} = \text{arctanh}\, x$ SE ESISTE È DISPARI

(c) Enunciare e dimostrare per via elementare le proprietà di iniettività, surgetività e monotonia delle funzioni iperboliche.

$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

INIETTIVITÀ NO PERCHÉ PARI $f(a)=f(b)$ $\forall a \neq 0$ $b=-a$

SURGETTIVITÀ NO PERCHÉ >0 $\forall x \in \mathbb{R}$ (SOMMA DI FUNZ. >0)

MONOTONIA STRETT. CRESCENTE IN $[0,+\infty)$

$$y>x \Rightarrow \cosh y = \frac{e^y+e^{-y}}{2} > \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \cosh x \quad \forall x,y \in [0,+\infty)$$

DIM

$$\frac{e^y+e^{-y}}{2} > \frac{e^x+e^{-x}}{2} \qquad e^y + \frac{1}{e^y} > e^x + \frac{1}{e^x} \qquad a+\frac{1}{a} > b+\frac{1}{b} \quad a>b\geq 1$$

$$a-\frac{1}{b} > b-\frac{1}{a} \qquad \frac{ab-1}{b} > \frac{ab-1}{a} \qquad ab-1>0 \qquad \frac{1}{b}>\frac{1}{a} \qquad a>b \quad \square$$

$\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

INIETTIVITÀ SÍ $\sinh x = \sinh y \Rightarrow x=y$

DIM $\sinh x = \dfrac{e^x-e^{-x}}{2} = \dfrac{e^y-e^{-y}}{2} = \sinh y$ $\quad \begin{cases} e^x = a > 0 \\ e^y = b > 0 \end{cases}$

$$a-\frac{1}{a} = b-\frac{1}{b} \qquad a+\frac{1}{b} = b+\frac{1}{a} \qquad \frac{ab+1}{b} = \frac{ab+1}{a} \Rightarrow a=b$$

SURGETTIVITÀ SÍ $\sinh x$ É CONTINUA E $\lim_{x\to\pm\infty} = \pm\infty$

MONOTONIA STRETT. CRESCENTE

$$y>x \Rightarrow \sinh y = \frac{e^y-e^{-y}}{2} > \frac{e^x-e^{-x}}{2} = \sinh x \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$$

DIM $\dfrac{e^y-e^{-y}}{2} > \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ $\quad e^y - \dfrac{1}{e^y} > e^x - \dfrac{1}{e^x}$ $\quad a-\dfrac{1}{a} > b-\dfrac{1}{b}$ $\quad a>b>0$

$$a+\frac{1}{b} > b+\frac{1}{a} \qquad \frac{ab+1}{b} > \frac{ab+1}{a} \qquad \frac{1}{b}>\frac{1}{a} \qquad a>b \quad \square$$

$$\mathrm{TANH}\,X = \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$$

INIETTIVITÀ SÌ $\quad \mathrm{TANH}\,X = \mathrm{TANH}\,Y \Rightarrow X = Y$

DIM $\quad \mathrm{TANH}\,X = \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} = \dfrac{e^{y}-e^{-y}}{e^{y}+e^{-y}} = \mathrm{TANH}\,Y \quad \begin{cases} e^{x}=a>0 \\ e^{y}=b>0 \end{cases}$

$$\frac{a-1/a}{a+1/a} = \frac{b-1/b}{b+1/b} \qquad \frac{a^2-1}{a^2+1} = \frac{b^2-1}{b^2+1} \qquad (a^2-1)(b^2+1) = (b^2-1)(a^2+1)$$

$$\cancel{a^2b^2}+a^2-b^2-\cancel{1} = \cancel{a^2b^2}+b^2-a^2-\cancel{1} \qquad (\cancel{a+b})(a-b) = (b-a)(\cancel{b+a})$$

$$a-b = b-a \qquad 2a = 2b \qquad a = b \;\square$$

SURGETTIVITÀ NO PERCHÉ CONTINUA E $\lim\limits_{x\to\pm\infty} = \pm 1$

MONOTONIA STRETT. CRESCENTE

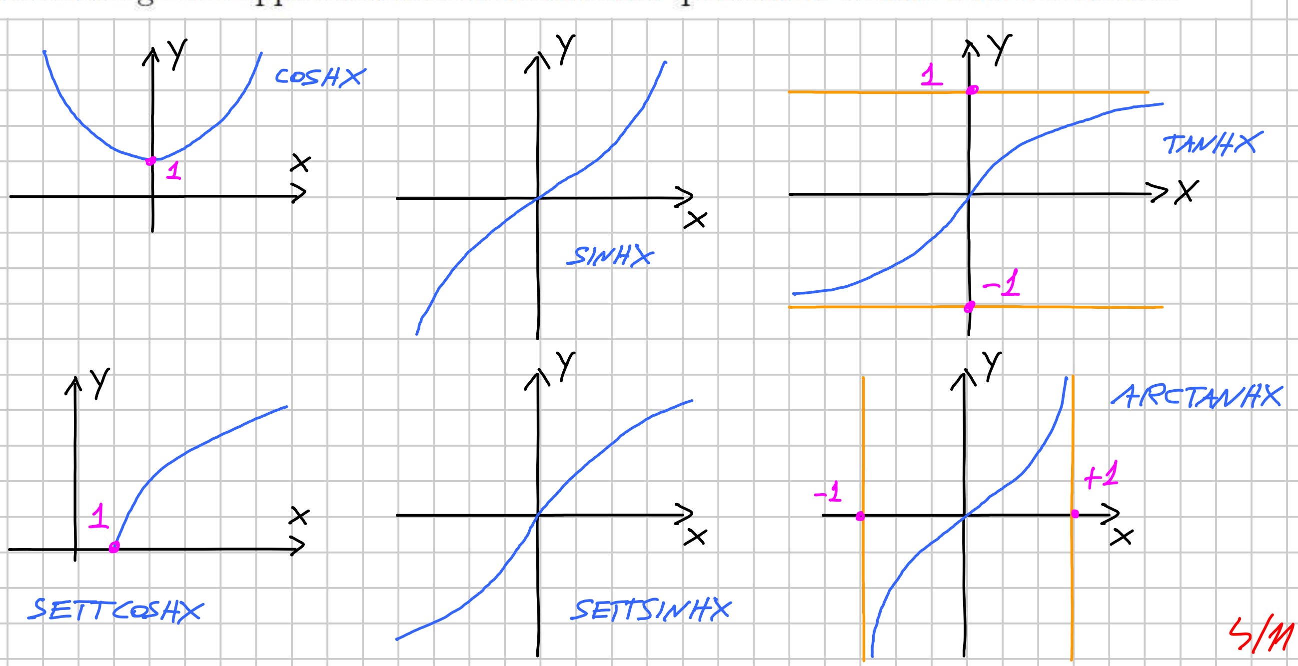
$$y > x \Rightarrow \mathrm{TANH}\,X = \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} = \frac{e^{y}-e^{-y}}{e^{y}+e^{-y}} = \mathrm{TANH}\,Y \quad \forall x,y\in\mathbb{R}$$

DIM $\quad \dfrac{a-1/a}{a+1/a} > \dfrac{b-1/b}{b+1/b} \qquad \dfrac{a^2-1}{a^2+1} > \dfrac{b^2-1}{b^2+1} \qquad (a^2-1)(b^2+1) > (b^2-1)(a^2+1)$

$$\cancel{a^2b^2}+a^2-b^2-\cancel{1} > \cancel{a^2b^2}+b^2-a^2-\cancel{1} \qquad (\cancel{a+b})(a-b) > (b-a)(\cancel{b+a})$$

$$a-b > b-a \qquad 2a > 2b \qquad a > b \;\square$$

(d) Tracciare grafici approssimativi delle funzioni iperboliche e delle relative inverse.



2. (Derivate e sviluppi)

(a) Determinare le derivate delle funzioni iperboliche e delle relative inverse.

$$(\cosh x)' = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)' = \frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right) = \frac{e^x-e^{-x}}{2} = \sinh x$$

$$(\sinh x)' = \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)' = \frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right) = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$(\tanh x)' = \left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)' = \frac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{\cancel{e^{2x}}+\cancel{e^{-2x}}+2-\cancel{e^{2x}}-\cancel{e^{-2x}}+2}{(e^x+e^{-x})^2} =$$

$$= \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{1}{(\cosh x)^2}$$

$\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$

$$(\operatorname{settcosh} x)' = \frac{1}{(\cosh y)'} = \frac{1}{\sinh(\operatorname{settcosh} x)} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$

$$(\operatorname{settsinh} x)' = \frac{1}{(\sinh y)'} = \frac{1}{\cosh(\operatorname{settsinh} x)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$\cosh^2 x = \frac{1}{1-\tanh^2 x}$

$$(\operatorname{arctanh} x)' = \frac{1}{(\tanh x)'} = \cosh^2(\operatorname{arctanh} x) = \frac{1}{1-x^2}$$

(b) Enunciare e dimostrare gli analoghi dei limiti notevoli e gli sviluppini per le funzioni iperboliche.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x}{x} = 1$$

DIM $$\frac{\sinh x}{x} = \frac{1}{2}\,\frac{e^x-e^{-x}}{x} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\frac{e^x-1}{x}}_{\to 1} + \underbrace{\frac{e^{-x}-1}{-x}}_{\to 1}\right) \to 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh x-1}{x^2} = \frac{1}{2}$$

DIM $$\frac{\cosh x-1}{x^2}\cdot\frac{\cosh x+1}{\cosh x+1} = \frac{\cosh^2 x-1}{x^2(\cosh x+1)} = \underbrace{\frac{\sinh^2 x}{x^2}}_{\to 1}\;\underbrace{\frac{1}{\cosh x+1}}_{\to \frac{1}{2}} \to \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tanh x}{x} = 1$$

DIM $$\frac{\tanh x}{x} = \underbrace{\frac{\sinh x}{x}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{1}{\cosh x}}_{\to 1} \to 1$$

$\sinh x = x + o(x)$ $\quad$ $\cosh x = 1 + o(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ $\quad$ $\tanh x = x + o(x)$

(c) Determinare gli sviluppi di Taylor di $\sinh x$ e $\cosh x$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{m} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^m + o(x^m)$$

$$\mathrm{SINH}X = \qquad f^{(n)}(0) = \begin{cases} \mathrm{SINH}(0) = 0 & n = 0, 2, 4, \dots \\ \mathrm{COSH}(0) = 1 & n = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

$$= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{m} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\mathrm{COSH}X = \qquad f^{(n)}(0) = \begin{cases} \mathrm{COSH}(0) = 1 & n = 0, 2, 4, \dots \\ \mathrm{SINH}(0) = 1 & n = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{m} \frac{x^{2n}}{2n!} + o(x^{2n})$$

3. (Formulario della trigonometria iperbolica)

(a) Dimostrare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$\cosh x + \sinh x = e^x, \qquad \cosh x - \sinh x = \overset{e^{-x}}{\cancel{e^x}}.$$

$$\begin{cases} \mathrm{COSH}X + \mathrm{SINH}X = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} + \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \dfrac{e^x + e^x}{2} + \overset{=0}{\cancel{\dfrac{e^{-x} - e^{-x}}{2}}} = e^x \\ \mathrm{COSH}X - \mathrm{SINH}X = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} - \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \dfrac{e^x - e^x}{2} + \dfrac{e^{-x} + e^{-x}}{2} = e^{-x} \end{cases}$$

(b) Dimostrare la relazione fondamentale

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\mathrm{COSH}^2X - \mathrm{SINH}^2X = (\mathrm{COSH}X + \mathrm{SINH}X)(\mathrm{COSH}X - \mathrm{SINH}X) = e^x \cdot e^{-x} = e^0 = 1$$

(c) Enunciare e dimostrare le formule di duplicazione per $\sinh x$ e $\cosh x$.

$$\mathrm{SINH}(2X) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}(e^x + e^{-x}) = 2\,\mathrm{SINH}X\,\mathrm{COSH}X$$

$$\mathrm{COSH}(2X) = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - 2}{2} = 2\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - 1 =$$

$$= 2\,\mathrm{COSH}^2X - 1 = \mathrm{COSH}^2X + \mathrm{SINH}^2X = 1 + 2\,\mathrm{SINH}^2X$$

(d) Enunciare e dimostrare le formule di addizione e sottrazione per $\sinh x$, $\cosh x$ e $\tanh x$.

$$\sinh(x+y)=\frac{e^{x+y}-e^{-x-y}}{2}=\frac{1}{2}\left(e^{x}\cdot e^{y}-e^{-x}\cdot e^{-y}\right)$$

$$\begin{cases} e^{x}e^{y}-e^{-x}e^{-y}=(e^{x}+e^{-x})(e^{y}-e^{-y})+e^{x}e^{-y}-e^{-x}e^{y} \\ e^{x}e^{-y}-e^{-x}e^{y}=(e^{x}-e^{-x})(e^{-y}+e^{y})-e^{x}e^{y}+e^{-x}e^{y} \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow 2(e^{x}e^{y}-e^{-x}e^{-y})=(e^{x}+e^{-x})(e^{y}-e^{-y})+(e^{x}-e^{-x})(e^{-y}+e^{y})$$

$$\cancel{4}\sinh(x+y)=\cancel{4}\cosh x\cdot\sinh y+\cancel{4}\sinh x\cosh y$$

$$\begin{cases} \sinh(x+y)=\cosh x\cdot\sinh y+\sinh x\cdot\cosh y \\ \sinh(x-y)=\cosh x\cdot\sinh(-y)+\sinh x\cdot\cosh(-y)= \end{cases}$$

$$=\sinh x\cdot\cosh y-\cosh x\cdot\sinh y$$

$$\cosh(x+y)=\frac{e^{x+y}+e^{-x-y}}{2}=\frac{1}{2}\left(e^{x}\cdot e^{y}+e^{-x}\cdot e^{-y}\right)$$

$$\begin{cases} e^{x}\cdot e^{y}+e^{-x}\cdot e^{-y}=(e^{x}+e^{-x})(e^{y}+e^{-y})-e^{x}e^{-y}-e^{-x}e^{y} \\ e^{x}e^{-y}+e^{-x}e^{y}=(e^{x}-e^{-x})(e^{-y}-e^{y})+e^{x}e^{y}+e^{-x}e^{-y} \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow 2(e^{x}e^{y}+e^{-x}e^{-y})=(e^{x}+e^{-x})(e^{y}+e^{-y})-(e^{x}-e^{-x})(e^{-y}-e^{y})$$

$$\cancel{4}\cosh(x+y)=\cancel{4}\cosh x\cosh y-\cancel{4}\sinh x\sinh(-y)$$

$$\begin{cases} \cosh(x+y)=\cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y \\ \cosh(x-y)=\cosh x\cosh(-y)+\sinh x\cdot\sinh(-y)= \end{cases}$$

$$=\cosh x\cdot\cosh y-\sinh x\cdot\sinh y$$

$$\tanh(x+y) = \frac{\sinh(x+y)}{\cosh(x+y)} = \frac{\cosh x \cdot \sinh y + \sinh x \cdot \cosh y}{\cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y} =$$

$$= \frac{\frac{\cancel{\cosh x} \cdot \sinh y}{\cancel{\cosh x} \cosh y} + \frac{\sinh x \cdot \cancel{\cosh y}}{\cosh x \cancel{\cosh y}}}{\underset{1}{\frac{\cancel{\cosh x}\cancel{\cosh y}}{\cancel{\cosh x}\cancel{\cosh y}}} + \frac{\sinh x \sinh y}{\cosh x \cosh y}} = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \cdot \tanh y}$$

$$\tanh(x-y) = \frac{\tanh x - \tanh y}{1 - \tanh x \cdot \tanh y}$$

(e) Dedurre dalle precedenti le formule “product → sum” e “sum → product” della trigonometria iperbolica.

$$\begin{cases} \sinh(x+y) = \cosh x \cdot \sinh y + \sinh x \cdot \cosh y & (i) \\ \sinh(x-y) = \sinh x \cdot \cosh y - \cosh x \cdot \sinh y & (ii) \end{cases}$$

A) $$\begin{cases} \sinh(x+y) + \sin(x-y) = 2 \sinh x \cdot \cosh y & (i)+(ii) \\ \sinh(x+y) - \sin(x-y) = 2 \cosh x \cdot \sinh y & (i)-(ii) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sinh x \cdot \cosh y = \frac{1}{2}\left(\sinh(x+y) + \sin(x-y)\right) \\ \cosh x \cdot \sinh y = \frac{1}{2}\left(\sinh(x+y) - \sin(x-y)\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y & (i) \\ \cosh(x-y) = \cosh x \cdot \cosh y - \sinh x \cdot \sinh y & (ii) \end{cases}$$

B) $$\begin{cases} \cosh(x+y) + \cosh(x-y) = 2 \cosh x \cdot \cosh y & (i)+(ii) \\ \cosh(x+y) - \cosh(x-y) = 2 \sinh x \cdot \sinh y & (i)-(ii) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cosh x \cdot \cosh y = \frac{1}{2}\left(\cosh(x+y) + \cosh(x-y)\right) \\ \sinh x \cdot \sinh y = \frac{1}{2}\left(\cosh(x+y) - \cosh(x-y)\right) \end{cases}$$

$$X=\frac{\alpha+\beta}{2} \qquad Y=\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad X+Y=\alpha \qquad X-Y=\beta$$

A) $$\begin{cases} \sinh(X+Y)+\sinh(X-Y)=2\sinh X\cdot\cosh Y & (i)+(ii) \\ \sinh(X+Y)-\sinh(X-Y)=2\cosh X\cdot\sinh Y & (i)-(ii) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sinh\alpha+\sinh\beta=2\sinh\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cosh\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \\ \sinh\alpha-\sinh\beta=2\cosh\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sinh\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \end{cases}$$

B) $$\begin{cases} \cosh(X+Y)+\cosh(X-Y)=2\cosh X\cdot\cosh Y & (i)+(ii) \\ \cosh(X+Y)-\cosh(X-Y)=2\sinh X\cdot\sinh Y & (i)-(ii) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cosh\alpha+\cosh\beta=2\cosh\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sinh\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \\ \cosh\alpha-\cosh\beta=2\sinh\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sinh\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \end{cases}$$

4. Determinare formule esplicite per le funzioni iperboliche inverse in termini di logaritmi.

$$y=\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{a-a^{-1}}{2} \qquad a-\frac{1}{a}=2y \qquad a=e^x>0$$

$$a^2-2ay-1=0 \qquad a=\frac{2y\pm\sqrt{4y^2+4}}{2}=y\pm\sqrt{y^2+1}$$

$>y$

$$a=e^x=y+\sqrt{y^2+1} \qquad x=\text{settsinh}\,y=\log\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)$$

$$y=\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\frac{a+a^{-1}}{2} \qquad a+\frac{1}{a}=2y \qquad a=e^x>1$$

$$a^2-2ay+1=0 \qquad a=\frac{2y\pm\sqrt{4y^2-4}}{2}=y\pm\sqrt{y^2-1}$$

$$a=e^x=y\pm\sqrt{y^2-1} \qquad x=\text{settcosh}\,y=\log\left(y\pm\sqrt{y^2-1}\right)$$

$$\begin{cases} x>0 \quad y\pm\sqrt{y^2-1}>1 \qquad y+\sqrt{y^2-1}>1 \qquad y-1>-\sqrt{y^2-1} \\ y-\sqrt{y^2-1}>1 \qquad y-1>\sqrt{y^2-1} \qquad \cancel{y^2}+\cancel{1}-2y>\cancel{y^2}-\cancel{1} \quad -2y>0 \end{cases}$$

$$x=\text{settcosh}\,y=\log\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)$$

$$y = \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{a - 1/a}{a + 1/a} = \frac{a^2-1}{a^2+1} \qquad a = e^x > 0$$

$$(a^2+1)y = a^2 - 1 \qquad (y-1)a^2 = -1-y \qquad a^2 = \frac{1+y}{1-y} \qquad a = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}}$$

$$x = \operatorname{arctanh} y = \log\sqrt{\frac{1+y}{1-y}} = \frac{1}{2}\log\frac{1+y}{1-y}$$

5. Determinare lo sviluppo di Taylor dell'inversa della funzione $\tanh x$.

$$\operatorname{arctan} y = \frac{1}{2}\log\frac{1+y}{1-y} = \frac{1}{2}\left(\log(1+y) - \log(1-y)\right) =$$

$$\begin{cases} \log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5} - \frac{y^6}{6} + \dots \\ \log(1-y) = -y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} - \frac{y^5}{5} - \frac{y^6}{6} + \dots \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2}\left(2y + 2\frac{y^3}{3} + 2\frac{y^5}{5} + 2\frac{y^7}{7} + \dots\right) =$$

$$= y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + \frac{y^7}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{m} \frac{y^{2n+1}}{2n+1} + o(y^{2n+1})$$

6. (Questa domanda richiede un minimo di conoscenza dei numeri complessi)

Giustificare le relazioni

$$\cosh x = \cos(ix) \qquad \sinh x = -i\sin(ix)$$

- utilizzando le definizioni e la forma esponenziale dei numeri complessi,
- utilizzando formalmente gli sviluppi di Taylor.

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y \qquad y = ix \qquad iy = -x$$

$$e^{-x} = \cos(ix) + i\sin(ix) \qquad e^{x} = \cos(ix) - i\sin(ix)$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos(ix) - \cancel{i\sin(ix)} + \cos(ix) + \cancel{i\sin(ix)}\right)$$

$$\cosh x = \cos(ix)$$

$$\sinh x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(\cancel{\cos(ix)} - i\sin(ix) - \cancel{\cos(ix)} - i\sin(ix)\right)$$

$$\sinh x = -i\sin ix$$

<u>TAYLOR</u>

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \frac{y^8}{8!} + \dots$$

$$\cos(ix) = 1 - \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^4}{4!} - \frac{(ix)^6}{6!} + \frac{(ix)^8}{8!} + \dots$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots = \cosh x$$

$$\sin y = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \dots$$

$$-i\sin(ix) = -i\left(ix - \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^5}{5!} - \frac{(ix)^7}{7!} + \dots\right) =$$

$$= -i\left(ix + i\frac{x^3}{3!} + i\frac{x^5}{5!} + i\frac{x^7}{7!} + \dots\right) =$$

$$= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots = \sinh x$$

$$\cosh x + \sinh x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = e^{x}$$